

**Área de concentração:  
Desenvolvimento de Processos Químicos**

# **MODELAGEM DO AQUECIMENTO DE FLUIDOS COM ESCOAMENTO EM TUBOS**

**Autor : Elvis Ronald López Mercado**

**Orientador: José Roberto Nunhez  
Colaborador : Reginaldo Guirardello**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Química  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Química.

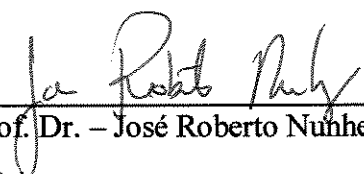
**Campinas – São Paulo  
Março 2000**

**UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE**



2000 3567

Dissertação de Mestrado defendida por Elvis Ronald López Mercado e aprovada em 31 de março de 2000 pela banca examinadora constituída pelos doutores:



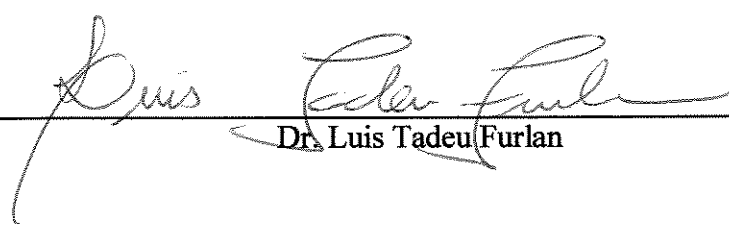
---

Prof. Dr. – José Roberto Nuhhez



---

Profa. Dra. Liliane Maria Ferrareso Lona Batista

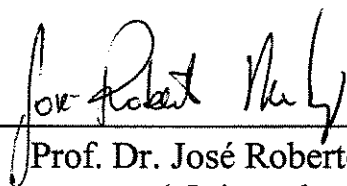


---

Dr. Luis Tadeu Furlan

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

Esta versão corresponde a redação final da dissertação de Mestrado em Engenharia Química defendida pelo Eng. Elvis Ronald López Mercado e aprovada pela Comissão julgadora em 31 de Março de 2000.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'José Roberto Nunhez', is written over a horizontal line.

Prof. Dr. José Roberto Nunhez  
( Orientador )

Dedico este trabalho

À minha querida esposa Evelin pelo carinho, compreensão e companhia.

Aos meus pais Augusto e Betty pelo exemplo, e aos meus irmãos Orlando, Edgar, Miguel, Jenny e Augusto (Filho).

Aos meus sogros Hilario e Casta pelo apoio.

Aos meus “amigos de sempre” representados aqui pelo Richard.

# Agradecimentos

A Deus misericordioso, pelo amor e por tudo.

À UNICAMP e à FEQ por ter me acolhido e permitido o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq pelo importante apoio financeiro.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Roberto Nunhez, pela oportunidade, ajuda e o incentivo constante.

Meu mais profundo agradecimento ao Prof. Dr. Reginaldo Guirardello por sua contribuição durante todas as etapas do desenvolvimento deste trabalho e por seu interesse e atenção.

Aos professores da PÓS GRADUAÇÃO/ FEQ pela simpatia e pela contribuição na minha formação.

Aos colegas Richard, Simone, Patricia, Kelerson, Pedro Diaz, Pedro Arce, Iraí, Valter e principalmente a Montserrat por mostrar-se amiga e por sua disposição em ajudar.

À minha esposa Evelin por ter me apoiado em todos os momentos.

# Resumo

Este estudo propõe a modelagem do escoamento laminar e turbulento com transferência de calor conjugados em tubos de seção cilíndrica. Em vez de usar os métodos convencionais de elementos finitos ou volumes finitos, esta formulação aplica uma técnica diferente que discretiza o fluxo na direção radial usando o método das diferenças finitas de 4ª ordem. Com esta técnica, um sistema composto de várias equações diferenciais ordinárias para a temperatura e outro composto de equações algébricas lineares para as velocidades são obtidas.

As equações diferenciais ordinárias são integradas na direção axial utilizando-se o método de Runge – Kutta de 4ª ordem. Os valores da viscosidade, massa específica, capacidade calorífica e condutividade térmica são funções da temperatura, o qual torna o modelo satisfatório para o cálculo de altos gradientes de temperatura, como no caso dos fornos de refinaria.

Para a turbulência, utiliza-se um modelo de ordem zero, no caso do “comprimento de mistura de Prandtl”.

Como o gradiente da pressão é calculado em cada ponto, a queda de pressão total é obtida através de uma integração ao longo do tubo.

Uma característica interessante desta formulação é que para o caso laminar o método é não iterativo, o que o torna mais rápido que os métodos convencionais.

## **Palavras chaves:**

Diferenças finitas – escoamento laminar e turbulento – tubo – Transferência de calor – fluido dinâmica computacional.

# Abstract

This study considers the modeling of laminar and turbulent flows with conjugated transference of heat in tubes of cylindrical section. Instead of using the conventional finite element or finite volume methods, this formulation applies a different technique discretizing the flow in the radial direction using a 4<sup>th</sup> order finite differences method. Using this technique, a system composed of several ordinary differential equations for the temperature and another composed of linear algebraic equations for the velocities are obtained.

The equations are integrated in the axial direction using a 4<sup>th</sup> order Runge Kutta method. The values of viscosity, density, heat capacity and thermal conductivity are dependent on the temperature, which makes the model suitable for the calculation of high temperature gradients, as in the case of refinery fired heaters.

The turbulence is taken into account using the "mixing length of Prandtl" as a zero order turbulence model.

Since the pressure gradient is calculated in each point, the total pressure drop is obtained by integration through out the tube.

A very interesting feature of this formulation is that for the study of laminar flow the method is non-iterative, which makes it more desirable and faster than conventional methods.

## Keywords:

Finite differences - Laminar and turbulent flow – Pipe - Heat transfer - Computational fluid dynamics.

UNIDADE BC  
N.º CHAMADA:  
T/UNICAMP  
LBB/am  
PAREDO 41550  
18/00  
R\$ 11,00  
13-07-00

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP



# Sumário

1. INTRODUÇÃO .....	01
1.1 MOTIVAÇÃO .....	01
1.2 APRESENTAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO .....	03
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	06
3. MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ESCOAMENTO LAMINAR .....	09
3.1 INTRODUÇÃO .....	09
3.2 MODELO RIGOROSO DO PROCESSO .....	09
3.2.1 Conservação de Massa .....	09
3.2.2 Conservação da Quantidade de Movimento .....	10
3.2.3 Conservação da Energia .....	13
3.3 MODELO APLICADO .....	16
3.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	17
4. MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO ...	18
4.1 INTRODUÇÃO .....	18
4.2 OBTENÇÃO DO MODELO .....	19

4.2.1	Equação da quantidade de movimento .....	19
4.2.2	Equação da energia .....	22
4.2.3	Equação da continuidade .....	23
4.3	MODELO TURBULENTO APLICADO .....	23
4.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	25
5.	MÉTODOS NUMÉRICOS .....	26
5.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS DE 4ª ORDEM .....	26
5.2	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG .....	28
6.	CÁLCULO PARA O ESCOAMENTO LAMINAR .....	30
6.1	INTRODUÇÃO .....	30
6.2	EQUAÇÕES PARA DISCRETIZAR .....	31
6.3	ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO .....	33
6.4	CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE AXIAL $v_z$ .....	35
6.5	CÁLCULO DO PERFIL DE TEMPERATURA .....	38
6.6	CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE RADIAL $V_r$ .....	42
6.7	CÁLCULO DA QUEDA DE PRESSÃO .....	45
7.	CÁLCULO PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO .....	47
7.1	INTRODUÇÃO .....	47
7.2	EQUAÇÕES PARA DISCRETIZAR .....	48

7.3 DIFICULDADES PARA A OBTENÇÃO DO PERFIL PRÓXIMO À PAREDE ....	49
7.4 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO .....	54
7.5 CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE AXIAL $V_z$ .....	57
7.6 CÁLCULO DO PERFIL DE TEMPERATURA .....	61
7.7 CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE RADIAL $V_r$ .....	65
7.8 CÁLCULO DA QUEDA DE PRESSÃO .....	69
8. RESULTADOS .....	70
8.1 ESTUDO DA TEMPERATURA .....	70
8.1.1 Perfis de temperatura .....	70
8.1.2 Variação da temperatura média de seção .....	75
8.1.3 Influência da temperatura de parede .....	78
8.1.4 Variação da temperatura com o raio .....	79
8.1.5 Variação da temperatura com o comprimento .....	82
8.2 ESTUDO DA VELOCIDADE .....	84
8.2.1 Perfis de velocidade axial .....	84
8.2.2 Variação da velocidade axial com o comprimento .....	85
8.2.3 Variação da velocidade axial com o raio .....	86
8.2.4 Comparação do perfil de velocidade axial com dados experimentais	88
8.2.5 Perfis de velocidade radial .....	91

8.3 QUEDA DE PRESSÃO TOTAL .....	93
9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	95

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APÊNDICE (A): Dependência das propriedades físicas da água com a Temperatura

# Lista de Figuras

1.1-a	Seção transversal de um forno típico de refinaria .....	1
1.1-b	Vista lateral de um forno típico de refinaria, com o detalhe dos tubos .....	2
1.2	Esquema geral do problema físico .....	4
1.3	Perfil laminar de velocidade .....	4
1.4	Perfil laminar de Temperatura, para um fluido sendo aquecido .....	5
6.1	Malha para a discretização .....	30
7.1	Malha para a discretização .....	47
7.2	Perfil de velocidade axial ( $v_z$ ) em função do raio, mostrando o ponto que será calculado analiticamente .....	53
8.1	Perfil laminar de temperatura para $Re = 1\,800$ .....	71
8.2	Perfil turbulento de temperatura para $Re = 13\,000$ .....	71
8.3	Perfil turbulento de temperatura para $Re = 20\,000$ .....	72
8.4	Perfil turbulento de temperatura para $Re = 50\,000$ .....	73
8.5	Perfil laminar de temperatura para $Re = 2\,000$ .....	74
8.6	Perfil turbulento de temperatura para $Re = 12\,000$ .....	75
8.7	Temperatura média de seção em ( $z=L$ ) em função do $Re$ , para $L = 30\text{ m}$ .....	76
8.8	Temperatura média de seção em ( $z=L$ ) em função de ' $\theta$ ', para $L = 30\text{ m}$ .....	76
8.9	Temp. média de seção em ( $z=L$ ), em função do $Re$ , para ' $\theta$ ' = 2100 s .....	77

8.10	Temp. média de seção em ( $z=L$ ), em função de ' $L$ ', para ' $\theta$ ' = 2100 s .....	78
8.11	Influência da $T_w$ na temperatura média de seção em função do comprimento de tubo, com escoamento laminar .....	78
8.12	Influência da $T_w$ na temperatura média de seção em função do comprimento de tubo, com escoamento turbulento .....	79
8.13	Temperatura em função do raio, para $L = 50$ m. e $Re = 2\,000$ .....	80
8.14	Temperatura em função do raio, para $L = 50$ m. e $Re = 12\,000$ .....	80
8.15	Temperatura em função do raio, para $Re = 2\,000$ .....	81
8.16	Temperatura em função do raio para $Re = 12\,000$ .....	82
8.17	Temperatura em função do comprimento, $Re = 2\,000$ .....	83
8.18	Temperatura em função do comprimento, $Re = 12\,000$ .....	83
8.19	Perfil laminar de velocidade axial, $Re = 2\,000$ .....	84
8.20	Perfil turbulento de velocidade axial, $Re = 12\,000$ .....	85
8.21	Velocidade axial em função do comprimento, para $Re = 2\,000$ .....	85
8.22	Velocidade axial em função do comprimento, para $Re = 12\,000$ .....	86
8.23	Perfil laminar da velocidade axial em função do raio, para $Re = 2\,000$ .....	87
8.24	Perfil turbulento da velocidade axial em função do raio, para $Re = 12\,000$ ....	87
8.25	Comparação do perfil de velocidade axial, Laufer $Re = 50\,000$ .....	89
8.26	Comparação do perfil de velocidade axial, Laufer $Re = 500\,000$ .....	89
8.27	Comparação do perfil de velocidade axial, Haber J. $Re = 27\,281$ .....	90
8.28	Comparação do perfil de velocidade axial, Haber J. $Re = 48\,997$ .....	90
8.29	Perfil laminar de velocidade radial, $Re = 2\,000$ .....	91

8.30	Perfil turbulento de velocidade radial, $Re = 20\,000$ .....	91
8.31	Perfil laminar de velocidade radial, $Re = 20\,000$ .....	92
8.32	Perfil turbulento de velocidade radial, $Re = 20\,000$ .....	92
8.33	Gradiente de pressão em função do comprimento, para $Re = 2000$ e $L = 30\text{ m}$ .....	93
8.34	Queda de pressão total em função do número de Reynolds, para esc. laminares com $L = 30\text{ m}$ .....	94
8.35	Comparação da queda de pressão em função do $Re$ com correlações empíricas da literatura, para escoamentos turbulento e $L = 30\text{ m}$ .....	94

# Nomenclatura

$\hat{c}_p$	capacidade calorífica do fluido à pressão constante
D	diâmetro do tubo
$g_\theta$	constante da aceleração gravitacional na componente angular
$g_r$	constante da aceleração gravitacional na componente radial
$g_z$	constante da aceleração gravitacional na componente axial
h	coeficiente de transferência de calor
K	constante = $-(d\bar{P} / dz)$
k	condutividade térmica
$k_t$	condutividade turbulenta
L	comprimento do tubo
$l_m$	comprimento de mistura
$\dot{m}$	vazão mássica
p	pressão
P	pressão manométrica
r	posição axial
R	raio do tubo
Re	número adimensional de Reynolds = $(D \langle v \rangle \rho) / \mu$
$S^+$	distância adimensional (pequena), medida desde a parede do tubo
S	distância (pequena), medida desde a parede do tubo
T	temperatura do fluido



$\bar{T}$	temperatura média no tempo
$\langle T \rangle$	temperatura média de seção
$T_w$	temperatura da parede do tubo
$v_\theta$	velocidade na componente angular
$v_r$	velocidade na componente radial
$\bar{v}_r$	velocidade radial média no tempo
$v_z$	velocidade na componente axial
$\bar{v}_z$	velocidade axial média no tempo
$\langle v_z \rangle$	velocidade axial média
$z$	posição axial
$\Delta P$	queda de pressão
$\Delta r$	distância radial entre dois pontos da malha
$\Delta z$	distância axial entre dois pontos da malha
$\theta$	tempo de residência
$\mu$	viscosidade do fluido
$\mu_t$	viscosidade turbulenta
$\rho$	densidade do fluido
$\tau$	tensor tensão
$\tau_o$	tensor de cisalhamento na parede ( $r = R$ )

# Capítulo 1

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 MOTIVAÇÃO

O aquecimento e resfriamento de fluidos escoando no interior de dutos ocorrem nos processos mais importantes no campo da engenharia.

Este projeto de pesquisa é motivado pelo fenômeno acima mencionado. O petróleo antes de ser processado (ex. nas colunas de fracionamento) é aquecido em fornos, que basicamente consistem de uma câmara de aquecimento com tubos próximos às paredes do forno (onde escoa o petróleo). O calor é gerado pela queima de combustíveis e transmitido ao fluido que circula pelo interior dos tubos, como se exemplifica na Figura 1.1-a e 1.1-b.

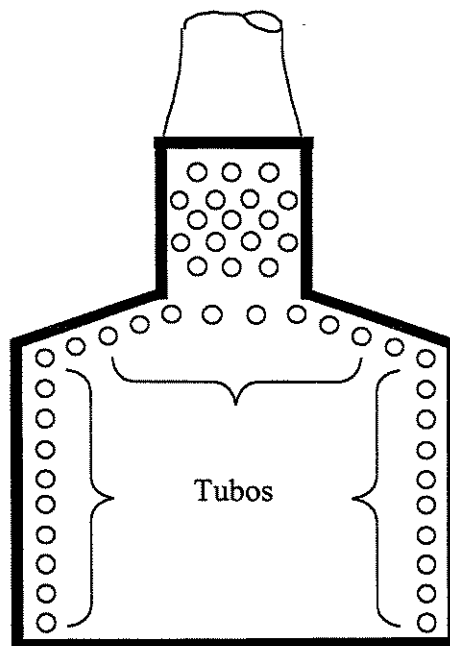


Figura 1.1-a Seção transversal de um forno típico de refinaria

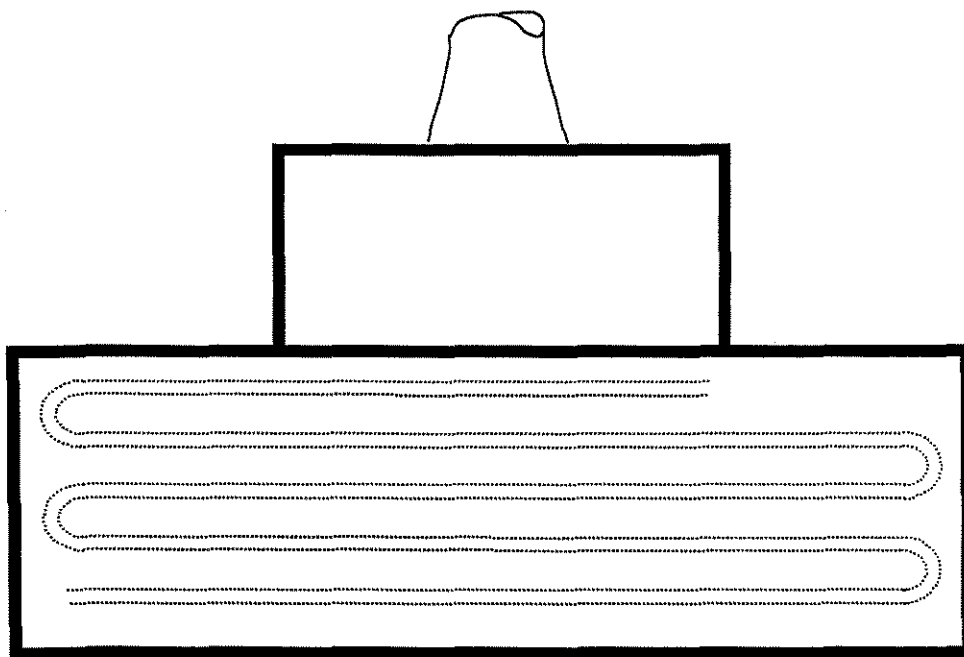


Figura 1.1-b Vista lateral de um forno típico de refinaria, com o detalhe dos tubos.

Estes fornos apresentam grandes dificuldades operacionais por causa da deposição de coque nas paredes interiores do tubo, causando uma constrição de fluxo, perda na troca de calor e também perda na resistência mecânica do tubo. O problema é tão crítico que muitas vezes força a uma parada antecipada das plantas para se efetuar a limpeza dos equipamentos.

As equações provenientes dos balanços de massa, momento e energia, acoplados às condições de contorno que regem os fenômenos internos dentro dos tubos, conduzem a um sistema de equações diferenciais que não tem solução analítica, de forma que procedimentos numéricos se fazem necessários para a solução dos mesmos. A fluido dinâmica computacional ( CFD : Computational Fluid Dynamics ) vem sendo cada vez mais utilizada com sucesso no entendimento destes processos.

## 1.2 APRESENTAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

Para um maior entendimento dos fenômenos envolvidos neste processo, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de se obter um programa utilizando-se um modelo bidimensional, capaz de calcular rigorosamente os perfis de temperatura, velocidade e a queda de pressão total, com as propriedades físicas do fluido variando em função da temperatura. O software utilizado foi o FORTRAN Power station versão 4.0

**As hipóteses do modelo são :**

- Temperatura da parede constante, como assume (Wimpress, 1963) no projeto de fornos de refinaria;
- Regime permanente ( não tem variação com o tempo );
- Regime laminar e turbulento;
- Simetria com relação ao ângulo “  $\theta$  ” ( não tem variação com “  $\theta$  ” );
- Não existe velocidade angular (  $V_{\theta} = 0$  );
- Propriedades físicas dependem da temperatura (  $\rho(T)$  ,  $\mu(T)$  ,  $k(T)$  ,  $\hat{C}_p(T)$  ); mas variam muito pouco com a pressão;
- Não há mudança de fase, sendo o meio líquido;
- Fluido Newtoniano.

Pode-se ver na Figura 1.2 um esquema geral do problema físico do trabalho, onde o fluido a ser aquecido escoa através de um tubo horizontal e o calor é fornecido radialmente através das paredes em direção ao centro do tubo. O tubo real ou “serpentina” dentro de um forno faz curvas no percurso, como se exemplifica na Figura 1.1-b. Mas no presente trabalho não se tem curvas, estuda-se o fenômeno da transferência de calor e o escoamento em uma porção delimitada de tubo, conforme se mostra na Figura 1.2.

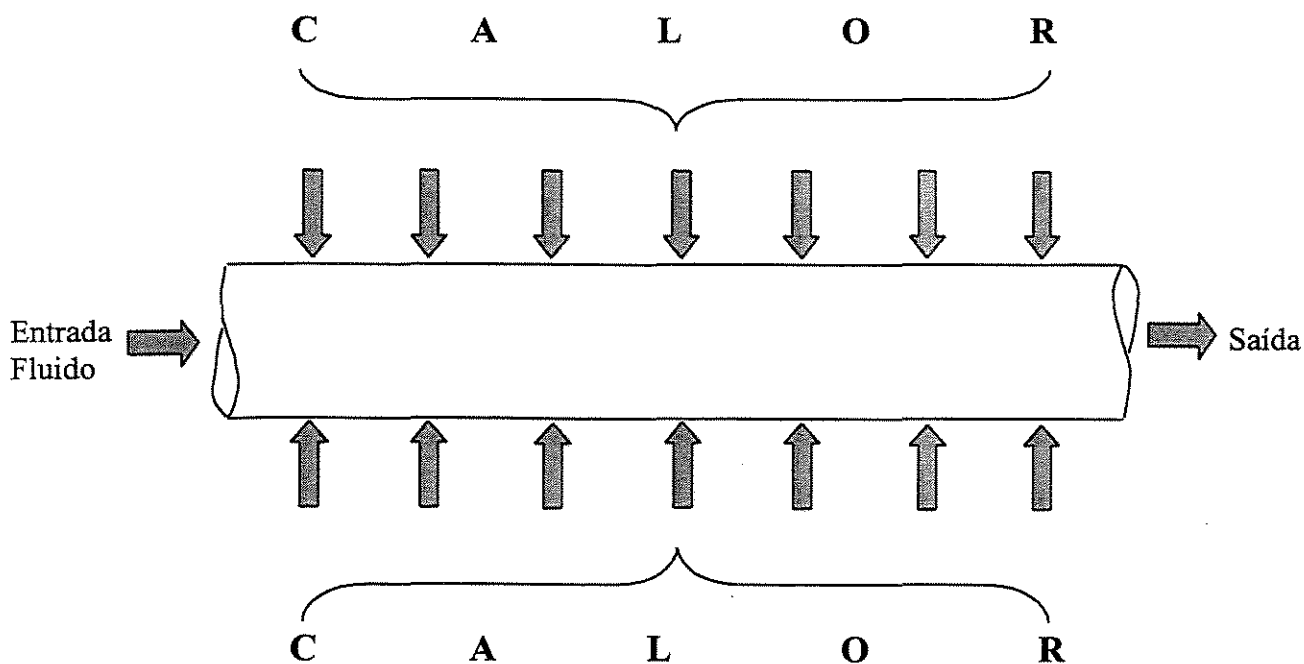


Figura 1.2 Esquema geral do problema físico.

Os resultados apresentados neste trabalho foram calculados para o aquecimento de fluido com escoamento laminar e turbulento, através de tubos de seção transversal cilíndrica. O modelo é genérico para qualquer fluido Newtoniano. O perfil de velocidade é plenamente desenvolvido. Na Figura 1.3 mostra-se o perfil para o escoamento laminar, qualitativamente.

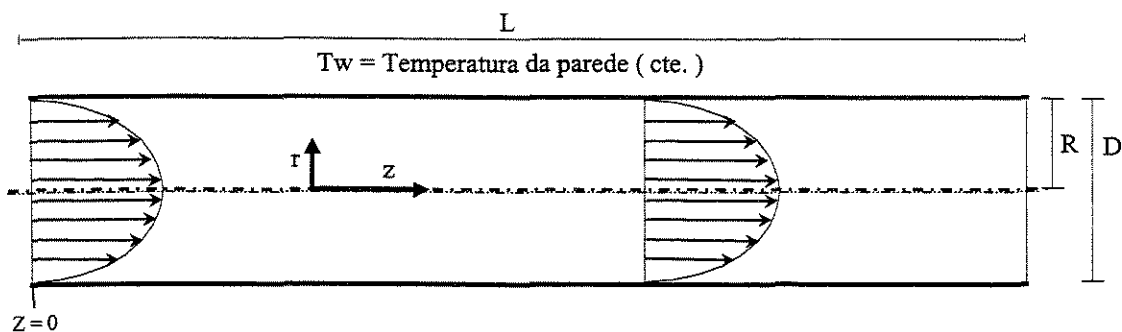


Figura 1.3 Perfil laminar de velocidade.

Considera-se o escoamento de entrada com perfil de velocidade **plenamente desenvolvido**, porque o fluido já vem de uma tubulação prévia à porção de tubo que esta sendo estudada, porém com temperatura constante, por isso considera-se um perfil uniforme de temperatura na entrada ao tubo em estudo, porque somente na porção de tubo que esta sendo analisada acontece a transferência de calor.

A temperatura de entrada do fluido foi de 303 K (30 °C), com perfil uniforme de temperatura. Conforme o fluido vai escoando estabelece-se um perfil de temperatura. Na Figura 1.4 mostra-se uma representação qualitativa do perfil de temperatura para escoamento laminar. A temperatura da parede do tubo é constante e igual a 363 K (90 °C) para as simulações feitas.

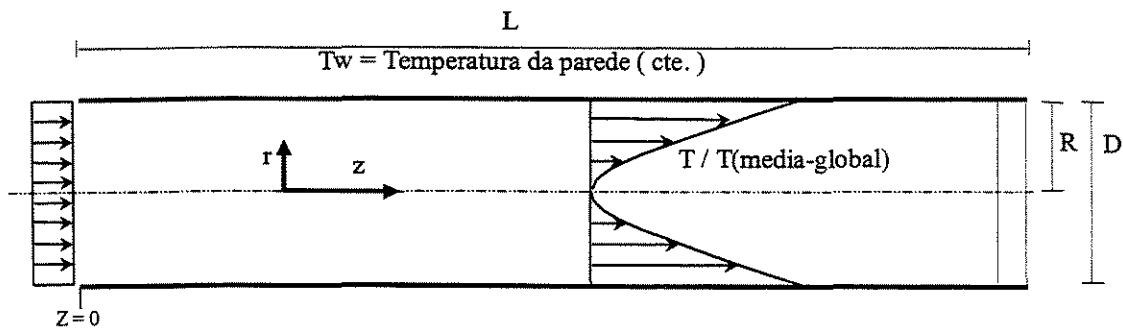


Figura 1.4 Perfil laminar de Temperatura, para um fluido sendo aquecido.

# Capítulo 2

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O conhecimento e a compreensão dos princípios básicos e dos conceitos da mecânica dos fluidos são essenciais na análise e projeto de qualquer sistema em que um fluido seja o meio atuante, como no projeto e desenvolvimento de modernos aviões, foguetes e sistemas de aquecimento e/ou resfriamento. Esta é uma pequena amostra diante da infinidade de problemas e aplicações, graças ao conhecimento da dinâmica dos escoamentos dos fluidos.

O escoamento em tubos vem sendo estudado com interesse há muito tempo, sendo que as primeiras pesquisas na área de mecânica dos fluidos foram relativas ao escoamento em canais e tubulações.

Navier (1827) e Stokes (1845), em trabalhos independentes, generalizaram as equações de movimento, com a inclusão do conceito da viscosidade, sendo que as equações têm aplicações restritas à determinadas classe de fluidos, denominados Newtonianos. As equações de Navier-Stokes são fundamentais, rigorosas e na maioria dos problemas, impossíveis de serem resolvidos analiticamente. Entretanto o uso difundido dos computadores digitais tem dado surgimento a muitos modelos numéricos e à publicação de cálculos computacionais em escoamentos viscosos.

Hoje os escoamentos em tubos ainda continuam sendo de muito interesse, sendo amplamente discutidos e aplicados na área da dinâmica dos fluidos. Novas áreas estão sendo investigadas, envolvendo transferência de energia sob forma de calor e influências de campos magnéticos.

A seguir, citam-se algumas pesquisas referentes a este trabalho.

Faghri e Sparrow (1980) consideram escoamento laminar em um tubo, no qual a porção de entrada da parede está externamente isolada, enquanto que a porção da parede na saída é uniformemente aquecida. Os autores fazem uma análise da condução axial na parede do tubo e no líquido. Concluíram que a condução axial na parede pode levar a condução de calor em sentido contrário ao escoamento na porção não diretamente aquecida do tubo, o que causaria um pré-aquecimento da parede e do líquido na porção de entrada, cujo efeito influenciaria no aumento da temperatura ao longo do tubo. Utilizam um perfil parabólico para a velocidade e consideram as propriedades físicas do fluido constantes ao longo do tubo. Novamente o interesse é estudar a condução axial nas paredes do tubo.

Travelho e Dias (1984) apresentam uma solução para a equação da energia em tubos, usando um perfil parabólico para a velocidade. O fluido é incompressível, o regime é permanente e o escoamento laminar, incluindo dissipação viscosa e condução axial de calor. A solução é apresentada como uma série de funções hipergeométricas para diversos tipos de condições de contorno. Nesse trabalho as propriedades físicas do fluido são constantes e o interesse é o estudo da condução axial em tubos.

Barozzi e Pagliarini (1985) desenvolveram um método combinando o princípio da superposição com o método dos elementos finitos, para resolver simultaneamente as equações da conservação de momento e energia. Este método foi empregado para considerar o efeito da condução da transferência de calor na parede para um escoamento laminar totalmente desenvolvido através de um tubo, cuja parede externa é uniformemente aquecida ao longo do comprimento finito. Este trabalho também dá maior ênfase na condução através da parede, até porque a espessura da parede é considerável. O modelo despreza o termo correspondente à dissipação viscosa. O programa é aplicado para diversos tipos de condições de contorno, mas tem a desvantagem de não permitir não-linearidades. Como por exemplo, das decorrentes de se ter as propriedades físicas dependentes da temperatura.

Carvalho (1993) calculou os perfis de velocidade para escoamento laminar entre placas planas paralelas e em uma cavidade de seção quadrada, para dutos de seção circular cilíndrica em regime laminar e turbulento; para o escoamento turbulento empregou o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  de turbulência. O método numérico usado foi o dos volumes finitos. Este trabalho estuda o escoamento sem transferência de calor.



Sefik e Bilir (1994) fizeram uma análise para o problema conjugado de escoamento axial e transferência de calor para um escoamento laminar desenvolvido. O tratamento é bidimensional para a parede e para a condução axial do fluido. A solução numérica é pelo método das diferenças finitas considerando uma parede de tubo grossa. Consideram a temperatura externa da parede constante e um perfil parabólico de velocidades para discretizar a equação diferencial na região do fluido. Também consideram propriedades físicas constantes ou independentes da temperatura. Entre as principais conclusões estão que o efeito de condução através da parede torna-se mais importante com o aumento na espessura da parede e com a diminuição da vazão. A transferência de calor por convecção é o mecanismo de transferência de calor mais importante no escoamento em tubos, o que significa que os resultados dependem principalmente das condições de escoamento do que das características da parede.

Muniz (1995) estudou o desenvolvimento da camada limite na região de entrada de tubos de seção transversal circular, para escoamento em regime laminar; obteve os comprimentos de entrada para vários números de Reynolds. Empregou o método dos volumes finitos.

# Capítulo 3

## 3. MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ESCOAMENTO LAMINAR

### 3.1 INTRODUÇÃO

Como já foi dito, o modelo supõe que as paredes do tubo estão a uma temperatura constante. O fluido entra com perfil uniforme de temperatura e supõe-se um perfil de velocidade plenamente desenvolvido, porque ele já vem de uma tubulação com perfil desenvolvido. A medida que o fluido escoar, a troca de calor da parede com o fluido em direção ao centro do tubo se estabelece e o perfil de temperatura muda à medida que se avança no comprimento do tubo.

### 3.2 MODELO RIGOROSO DO PROCESSO

Apresentam-se as equações provenientes dos balanços de massa, momento e energia para o problema de um tubo longo com a sua parede sendo aquecida a uma temperatura constante.

#### 3.2.1 Conservação de Massa

Conhecida também como *equação da Continuidade*, ela é obtida aplicando-se a lei de conservação da massa para um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo no espaço.

A equação geral é :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (3.2.1 - 1)$$

Onde:

$\rho$  = densidade  $\rho(x, y, z, t)$

$\vec{V}$  = velocidade  $\vec{V}(x, y, z, t)$

Em coordenadas cilíndricas :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) = 0 \quad (3.2.1-2)$$

O modelo assume simetria na linha central do tubo, o que é uma hipótese totalmente válida para esta situação, pois neste caso não há variação na direção angular. Considerando que o escoamento é em regime permanente, não há variação com o tempo. A Equação (3.2.1-2) toma a forma:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) = 0 \quad (3.2.1-3)$$

É importante salientar que, feita a análise de ordem de magnitude, embora  $v_r$  seja pequeno e desprezível nas equações da quantidade de movimento e energia (como se verá mais para a frente), na Equação (3.2.1-3) o termo contendo  $v_r$  é da mesma ordem de magnitude do outro termo da equação.

### 3.2.2 Conservação da quantidade de movimento

Também conhecida como *equação do movimento*, é obtida aplicando-se a lei de conservação do momento ou momentum, para um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo no espaço.

Utilizando-se a derivada substantiva, a equação geral é :

$$\rho \cdot \frac{D \vec{V}}{D t} = -\nabla \cdot \vec{p} + \rho \cdot \vec{g} - \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (3.2.2-1)$$

Onde:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \text{derivada substantiva da velocidade}$$

$$\vec{g} = \text{aceleração da gravidade}$$

$$\bar{p} = \text{pressão}$$

$$\tau = \text{tensões de cisalhamento}$$

Tanto para o componente radial como para o componente axial, os tensores são :

$$\tau_{rr} = -\mu \cdot \left[ 2 \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \cdot \left( \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \quad (3.2.2-2)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \cdot \left( \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \quad (3.2.2-3)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \cdot \left[ 2 \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \left( \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \quad (3.2.2-4)$$

$$\tau_{rz} = -\mu \cdot \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (3.2.2-5)$$

E o divergente do vetor velocidade é :

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.2.2-6)$$

Não existe componente angular devido à simetria do problema, não se tem velocidade angular nem forças externas atuando nesta direção, portanto expande-se a Equação (3.2.2-1) em coordenadas cilíndricas para os componentes radial e axial:

**Componente radial ( r ) :**

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot g_r - \\ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.2.2-7)$$

O termo dos efeitos gravitacionais “ $\rho \cdot g_r$ ” (pequeno para tubos horizontais) será incluído na pressão manométrica. Como a operação é em regime permanente e o modelo considera simetria, a equação se reduz a:

$$\rho \cdot \left[ v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot g_r - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{r\pi}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \quad (3.2.2 - 8)$$

Introduzindo a definição da pressão manométrica ‘P’ :

$$P = p + \rho \cdot g \cdot h \quad (3.2.2 - 9)$$

onde :

$$h = r \cdot \cos \theta$$

$$g_r = -g \cdot \cos \theta$$

$$g_\theta = g \cdot \sin \theta$$

$$g_z = 0$$

Pelo conhecimento do problema físico de um tubo com escoamento axial e fazendo-se uma análise de ordem de magnitude, nota-se que  $v_r$  é pequeno, e suas derivadas em qualquer direção também são pequenas, de forma que da Equação (3.2.2 - 8) fica:

$$|v_r| \ll |v_z|$$

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.2.2 - 10)$$

**Componente axial (z) :**

Da Equação (3.2.2 - 1) para o componente axial :

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g_z - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{z\theta}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (3.2.2 - 11)$$

Considerando-se regime permanente e que não há variação na direção angular:

$$\rho \cdot \left[ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g_z - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (3.2.2 - 12)$$

Lembrando-se que  $v_r$  é desprezível e feita uma análise de ordem de magnitude, indica que as derivadas da velocidade radial na direção axial são muito pequenas, de forma que estes termos podem ser desprezados com relação aos outros termos da equação. Desta maneira:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho \cdot g_z \quad (3.2.2 - 13)$$

Utilizando-se a definição de pressão manométrica introduzida na Equação (3.2.2-9), a Equação (3.2.2-13) toma a forma:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.2.2 - 14)$$

**Componente angular ( $\theta$ ):**

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (3.2.2 - 15)$$

### 3.2.3 Conservação da Energia

Conhecida também como *equação da energia*, é obtida aplicando-se a lei de conservação da energia para um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo no espaço.

Em notação vetorial,

$$\rho \cdot \hat{c}_v \cdot \frac{DT}{Dt} = -\left( \nabla \cdot \vec{q} \right) - T \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \cdot \left( \nabla \cdot \vec{V} \right) - \left( \tau : \nabla \vec{V} \right) \quad (3.2.3 - 1)$$

Onde:

$$\frac{DT}{Dt} = \text{derivada substantiva da temperatura}$$

$$\left( \boldsymbol{\tau} : \nabla \vec{V} \right) = \text{dissipação viscosa}$$

Como :

$$\hat{c}_p - \hat{c}_v = T \cdot \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \quad (3.2.3 - 2)$$

$$\rho = \frac{1}{\hat{V}} \implies \hat{c}_p - \hat{c}_v = -\frac{T}{\rho^2} \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \quad (3.2.3 - 3)$$

Usando a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.2.3 - 4)$$

e como  $\rho \cong \rho(T)$ , e a pressão do sistema é  $\cong$  constante.

$$\text{pois } \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \text{ é bem pequeno} \quad (3.2.3 - 5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (3.2.3 - 6)$$

$$\vec{\nabla} \rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cdot \nabla T \quad (3.2.3 - 7)$$

Então :

$$\rho \cdot \nabla \vec{V} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right] = 0 \quad (3.2.3 - 8)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right] \quad (3.2.3-9)$$

A equação da energia torna-se:

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \frac{DT}{Dt} = - \left( \nabla \cdot \vec{q} \right) - \left( \tau : \nabla \vec{V} \right) \quad (3.2.3-10)$$

Expandindo a Equação (3.2.3-10) em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \hat{c}_p \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ &\quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.2.3-11)$$

Sabendo que não há componente angular, o termo da dissipação viscosa fica:

$$\left( \tau : \nabla \vec{V} \right) = \mu \cdot \phi_v = \mu \cdot \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right] + 2\mu \cdot \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.2.3-12)$$

Mas, o termo da dissipação viscosa pode ser desprezado, já que ele é significativo somente em casos especiais, como para fluxos altamente viscosos ou com gradientes de velocidades elevados.

Fazendo-se uma análise da ordem de magnitude, nota-se que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Lembrando-se que, além de não ter componente angular, que o regime é permanente e  $v_r$  desprezível, chega-se a:

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.2.3-13)$$



### 3.3 MODELO APLICADO

A seguir, apresenta-se o modelo matemático (sistema de equações) em coordenadas cilíndricas, conformado pelas equações ( 3.2.1-3 ), ( 3.2.2-14 ) e ( 3.2.3 - 13 ), que são as equações da continuidade, movimento e energia respectivamente.

**Equação da Continuidade** ( Que vem do balanço de massa )

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) = 0 \quad (3.3-1)$$

**Equação do Momento** ( Que vem do balanço de momento )

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.3-2)$$

**Equação da Energia** ( Que vem do balanço de energia )

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.3-3)$$

### 3.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

**Para a equação do movimento e da continuidade**

No eixo de simetria	$r = 0$	$\left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$
Na parede	$r = R$	$v_z = 0$
Na parede	$r = R$	$v_r = 0$
Ao longo do tubo	$0 \leq z \leq L$	$\dot{m} = \int_0^R \rho \cdot v_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr$

**Para a equação de Energia**

No eixo de simetria	$r = 0$	$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$
Na parede	$r = R$	$-k \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -h \cdot (T_w - T)$
Na entrada do tubo	$0 \leq r \leq R$	$T = T_o \text{ em } z = 0$

# Capítulo 4

## 4. MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Em princípio, as equações fundamentais de conservação de massa, momento e energia, apresentadas no capítulo anterior, servem tanto para o escoamento laminar como para o escoamento turbulento. Entretanto, para a resolução que envolve escoamentos turbulentos, provavelmente por não se resolver numericamente as equações provenientes do modelo na mesma escala do tamanho do turbilhão, utiliza-se o procedimento conhecido como “decomposição de Reynolds”, onde as variáveis do escoamento instantâneo são escritas como sendo a soma de um valor médio no tempo ou valor de tempo ajustado (indicado por uma barra) e um valor flutuante (indicado por uma aspa). As variáveis empregadas são :

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

$$v_r = \bar{v}_r + v'_r$$

$$T = \bar{T} + T'$$

$$P = \bar{P} + P'$$

Aplicando-se a decomposição de Reynolds tanto na equação do balanço de momento como na equação do balanço de energia, aparecem novos termos contendo o produto de flutuações de velocidade, termo conhecido sob o nome de “tensor de Reynolds” ou “Reynolds stress”. Estes termos adicionais estão relacionados aos processos turbulentos.

O sistema de equações anteriormente descritas não poderia ser resolvido por conter um número maior de incógnitas, devido ao surgimento do tensor de Reynolds. Para solucionar este problema, surgem os chamados modelos de turbulência, sendo que estes modelos procuram relacionar os tensores de Reynolds com as velocidades médias no tempo, para poderem ser resolvidos.

Entre os modelos turbulentos mais conhecidos, têm-se os modelos de ordem zero, de primeira ordem e de segunda ordem. Neste trabalho usou-se um modelo de ordem zero, desenvolvido por Prandtl (1925).

## 4.2 OBTENÇÃO DO MODELO

### 4.2.1 Equação da quantidade de movimento

Para o tensor de Reynolds, Boussinesq (1877) estabeleceu:

$$\overline{\tau}^{(t)} = -\mu^{(t)} \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (4.2.1 - 1)$$

onde:

$\overline{\tau}^{(t)}$ : tensor de Reynolds

$\mu^{(t)} = \mu_t$ : viscosidade turbulenta

Empregando a teoria de comprimento de mistura de Prandtl (modelo de turbulência de ordem zero):

$$\overline{\tau}^{(t)} = -\rho \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (4.2.1 - 2)$$

onde:

$l_m$ : comprimento de mistura

Da Equação (4.2.1 – 1) e Equação (4.2.1 – 2), obtém-se a expressão para a viscosidade turbulenta, que aparece já na Equação (4.2.1 – 4):

$$\mu_t = \rho \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \quad (4.2.1 - 3)$$

A seguir, mostra-se a equação do movimento para o escoamento turbulento, equação muito parecida com a Equação (3.3 – 2), exceto pelo termo da viscosidade turbulenta que aparece na Equação (4.2.1 – 3).

$$0 = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot (\mu + \mu_t) \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right] \quad (4.2.1 - 4)$$

A expressão utilizada para o comprimento de mistura ' $l_m$ ' para tubos, foi dada por Rodi (1979):

$$\frac{l_m}{R} = 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \quad (4.2.1 - 5)$$

Por tanto:

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2 \quad (4.2.1 - 6)$$

Para tubos:

$$\left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| = - \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (4.2.1 - 7)$$

Chega-se que :

$$\mu_t = - \rho \cdot f(r) \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (4.2.1 - 8)$$

pela Equações ( 3.2.2 – 11 / 12 / 14 ), percebe-se que :

$$\bar{P} = \bar{P}(z) \text{ e definindo-se } -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = K \quad (4.2.1 - 9)$$

Onde ' K ' só depende de ' z ', mas não de ' r '.

Tem-se que:

$$0 = K + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot (\mu + \mu_t) \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right] \quad (4.2.1 - 10)$$

Arranjando e integrando:

$$-\frac{K \cdot r^2}{2} = r \cdot (\mu + \mu_t) \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + C \quad (4.2.1 - 11)$$

Como  $\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}$  tem valor finito em  $r = 0$   $\left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} = 0 \right)$ , então  $C = 0$ .

Por tanto :

$$-\frac{K \cdot r}{2} = (\mu + \mu_t) \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \quad (4.2.1 - 12)$$

Substituindo a Equação (4.2.1 – 8) na Equação (4.2.1 – 12)

$$\left( \mu - \rho \cdot f(r) \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} = -\frac{K \cdot r}{2} \quad (4.2.1 - 13)$$

$$-\rho \cdot f(r) \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right)^2 + \mu \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) + \frac{K \cdot r}{2} = 0 \quad (4.2.1 - 14)$$

Finalmente, a raiz que interessa deste polinômio de segundo grau é:

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2Kr\rho f(r)} - \mu}{-2\rho f(r)} \quad (4.2.1 - 15)$$

onde:

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2$$

Esta é a forma final da equação do momento ( Equação (4.2.1 – 15) ), que foi usada para o cálculo do escoamento turbulento.

#### 4.2.2 Equação da energia

Da mesma forma que na equação do momento, na equação da energia aparecem novos termos relacionados com os processos turbulentos, conhecidos como o fluxo turbulento de energia. Para resolver a equação da energia de tempo médio e obter os perfis de temperatura, é preciso postular alguma relação entre o fluxo turbulento de energia e a temperatura média no tempo.

Por analogia com a lei de Fourier de condução de calor tem-se:

$$q^{(t)} = -k^{(t)} \cdot \frac{d\bar{T}}{dr} \quad (4.2.2 - 1)$$

onde:

$q^{(t)}$ : fluxo turbulento de energia

$k^{(t)} = k_t$ : condutividade turbulenta

De acordo com a teoria de Prandtl, a energia e a quantidade de movimento transmitem-se em fluxo turbulento pelos mesmos mecanismos, segundo isto por analogia com a Equação (4.2.1 – 2):

$$q^{(t)} = -\rho \cdot \hat{c}_p \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \cdot \frac{d\bar{T}}{dr} \quad (4.2.2 - 2)$$

Da Equação (4.2.2 – 1) e Equação (4.2.2 – 2) :

$$k_t = \rho \cdot \hat{c}_p \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \quad (4.2.2 - 3)$$

Em função de  $f(r)$ , que foi definido na Equação (4.2.1 – 6):

$$k_t = -\rho \cdot \hat{c}_p \cdot f(r) \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (4.2.2 - 4)$$

Apresenta-se a equação da energia para o escoamento turbulento, a qual é igual à Equação (3.3 – 3), exceto pela condutividade turbulenta, termo que aparece devido à turbulência.

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \bar{v}_z \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot (k + k_t) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right] \quad (4.2.2 - 5)$$

### 4.2.3 Equação da continuidade

Como já foi dito, quando se aplica a decomposição de Reynolds na equação da continuidade que tem variáveis instantâneas, dá lugar à mesma equação, mas em função das velocidades médias no tempo ou equação da continuidade de tempo ajustado. Não aparece nenhum termo adicional como no caso das equações de movimento e energia.

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot \bar{v}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) = 0 \quad (4.2.3 - 1)$$

## 4.3 MODELO TURBULENTO APLICADO

### Equação da Continuidade

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot \bar{v}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) = 0 \quad (4.3 - 1)$$



**Equação do Momento**

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2 \cdot K \cdot r \cdot \rho \cdot f(r)} - \mu}{-2 \cdot \rho \cdot f(r)} \quad (4.3 - 2)$$

**Equação da Energia**

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \bar{v}_z \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot (k + k_t) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right] \quad (4.3 - 3)$$

Onde:

$$\mu_t = -\rho \cdot f(r) \cdot \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \quad (4.3 - 4)$$

$$k_t = -\rho \cdot \hat{c}_p \cdot f(r) \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (4.3 - 5)$$

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2 \quad (4.3 - 6)$$

$$K = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \quad (4.3 - 7)$$

Para encontrar o perfil de velocidades e temperatura com escoamento turbulento, é preciso resolver o sistema de equações (modelo) apresentados acima.

#### 4.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

**Para a equação do momento e da continuidade**

No eixo de simetria	$r = 0$	$\left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) = 0$
Na parede	$r = R$	$\bar{v}_z = 0$
Na parede	$r = R$	$\bar{v}_r = 0$
Ao longo do tubo	$0 \leq z \leq L$	$\dot{m} = \int_0^R \rho \cdot \bar{v}_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr$

**Para a equação da Energia**

No eixo de simetria	$r = 0$	$\left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) = 0$
Na parede	$r = R$	$-k \cdot \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) = -h \cdot (T_w - \bar{T})$
Na entrada do tubo	$0 \leq r \leq R$	$\bar{T} = \bar{T}_0 \text{ em } z = 0$

# Capítulo 5

## 5. MÉTODOS NUMÉRICOS

### 5.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS DE 4ª ORDEM

No método das diferenças finitas, as derivadas da variável dependente são aproximadas utilizando-se fórmulas para diferenciação numérica. Expressões como as que se apresentam abaixo, podem ser encontradas no “Manual de fórmulas, métodos e tabelas de matemática” Spiegel M.R.(1992), ou na tese Guirardello R. (1998), FEQ / UNICAMP.

As expressões para a primeira derivada, utilizando-se diferenças finitas de 4ª ordem, para pontos igualmente espaçados é dado por:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{3 \cdot y_{i-4} - 16 \cdot y_{i-3} + 36 \cdot y_{i-2} - 48 \cdot y_{i-1} + 25 \cdot y_i}{12 \cdot h}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{-y_{i-3} + 6 \cdot y_{i-2} - 18 \cdot y_{i-1} + 10 \cdot y_i + 3 \cdot y_{i+1}}{12 \cdot h}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{y_{i-2} - 8 \cdot y_{i-1} + 8 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}}{12 \cdot h}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{-3 \cdot y_{i-1} - 10 \cdot y_i + 18 \cdot y_{i+1} - 6 \cdot y_{i+2} + y_{i+3}}{12 \cdot h}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{-25 \cdot y_i + 48 \cdot y_{i+1} - 36 \cdot y_{i+2} + 16 \cdot y_{i+3} - 3 \cdot y_{i+4}}{12 \cdot h}$$

A seguir, expressões da derivada segunda, para pontos igualmente espaçados.

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_i} = \frac{11 \cdot y_{i-4} - 56 \cdot y_{i-3} + 114 \cdot y_{i-2} - 104 \cdot y_{i-1} + 35 \cdot y_i}{12 \cdot h^2}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_i} = \frac{-y_{i-3} + 4 \cdot y_{i-2} + 6 \cdot y_{i-1} - 20 \cdot y_i + 11 \cdot y_{i+1}}{12 \cdot h^2}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_i} = \frac{-y_{i-2} + 16 \cdot y_{i-1} - 30 \cdot y_i + 16 \cdot y_{i+1} - y_{i+2}}{12 \cdot h^2}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_i} = \frac{11 \cdot y_{i-1} - 20 \cdot y_i + 6 \cdot y_{i+1} + 4 \cdot y_{i+2} - y_{i+3}}{12 \cdot h^2}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_i} = \frac{35 \cdot y_i - 104 \cdot y_{i+1} + 114 \cdot y_{i+2} - 56 \cdot y_{i+3} + 11 \cdot y_{i+4}}{12 \cdot h^2}$$

Onde,

$[a, b]$  : é o intervalo de interesse, sobre o qual se impõe a malha uniforme

$$h = \frac{b-a}{M} \quad ; \quad M = \text{número de intervalos}$$

$$y_i = y(x_i)$$

$$y_{i-1} = y(x_i - h)$$

$$y_{i+1} = y(x_i + h)$$

$$y_{i-2} = y(x_i - 2h)$$

$$y_{i+2} = y(x_i + 2h)$$

$$y_{i-3} = y(x_i - 3h)$$

$$y_{i+3} = y(x_i + 3h)$$

$$y_{i-4} = y(x_i - 4h)$$

$$y_{i+4} = y(x_i + 4h)$$

O resultado é um sistema de equações nas variáveis  $y_1, y_2, \dots, y_M, y_{M+1}$ . Por exemplo, para uma equação diferencial de segunda ordem, serão necessárias  $M-1$  equações deste tipo, além de duas equações para as condições de contorno, fazendo um total de  $M+1$  equações.

## 5.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

Uma forma de saber se o intervalo 'h' é suficiente para um resultado, utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (clássico), é repetir o cálculo utilizando a metade desse intervalo. O procedimento é repetido até que os resultados sejam independentes da malha. Entretanto, isso requer um número maior de computações. Uma forma mais eficiente que requer um menor número de cálculos é o método de Runge-Kutta Fehlberg.

- Tendo-se o valor de .....  $y_i$  em  $x_i$

- o procedimento para se determinar .....  $y_{i+1}$  em  $x_{i+1} = x_i + h$

é dado por:

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{k_1}{4}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{3 \cdot h}{8}, y_i + \frac{3 \cdot k_1}{32} + \frac{9 \cdot k_2}{32}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_i + \frac{12 \cdot h}{13}, y_i + \frac{1932 \cdot k_1}{2197} - \frac{7200 \cdot k_2}{2197} + \frac{7296 \cdot k_3}{2197}\right)$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + \frac{439 \cdot k_1}{216} - 8 \cdot k_2 + \frac{3680 \cdot k_3}{513} - \frac{845 \cdot k_4}{4104}\right)$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{8 \cdot k_1}{27} + 2 \cdot k_2 - \frac{3544 \cdot k_3}{2565} + \frac{1859 \cdot k_4}{4104} - \frac{11 \cdot k_5}{40}\right)$$

Método de quarta ordem, com um erro global da ordem de  $h^4$  :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25 \cdot k_1}{216} + \frac{1408 \cdot k_3}{2565} + \frac{2197 \cdot k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}$$

Método de quinta ordem, com um erro global da ordem de  $h^5$  :

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{16 \cdot k_1}{135} + \frac{6656 \cdot k_3}{12825} + \frac{28561 \cdot k_4}{56430} - \frac{9 \cdot k_5}{50} + \frac{2 \cdot k_5}{55}$$

Erro aproximado no passo  $h$ :

$$y_{i+1}^* - y_{i+1} = \frac{k_1}{360} - \frac{128 \cdot k_3}{4275} - \frac{2197 \cdot k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2 \cdot k_6}{55}$$

Para determinar:  $y_{i+1}$  em  $x_{i+1} = x_i + h$

pode ser feito com  $y_{i+1}^*$ .

O método de Runge-Kutta Fehlberg pode ser encontrado nos livros de métodos numéricos. Para este trabalho usou-se o livro de Curtis F. G. ( 1994).

# Capítulo 6

## 6. CÁLCULO PARA O ESCOAMENTO LAMINAR

### 6.1 INTRODUÇÃO

A discretização do modelo matemático desenvolvido nos capítulos 3 e 4 é bidimensional. O sistema para tubos pode ser considerado simétrico no centro do tubo. A discretização utiliza, então, coordenadas axiais e radiais.

Devido à simetria considerou-se somente “metade” do tubo, desde o seu centro (raio igual a zero) até a parede do mesmo (raio igual a  $R$ ).

No eixo axial ‘ $z$ ’ foram escolhidos comprimentos de tubo pelo menos 100 vezes maiores do que o diâmetro do tubo.

A malha gerada consta de 10 intervalos ( $M$ ) ou 11 pontos ‘ $m$ ’ no raio, e ( $N$ ) intervalos ou ( $N+1$ ) pontos em ‘ $z$ ’. Tendo assim uma malha de  $(M+1) \times (N+1)$  pontos, nos quais são discretizadas as equações diferenciais. O esquema da malha é apresentada na Figura 6.1.

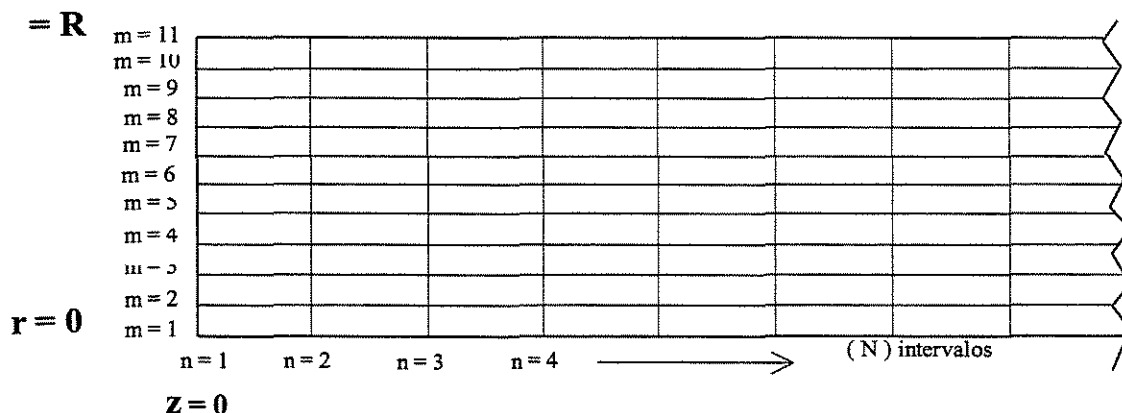


Figura 6.1 Malha para a discretização

A discretização no sentido radial 'r' utiliza o método das diferenças finitas de 4ª ordem, mas a integração no sentido axial 'z' é feita utilizando-se o método de Runge-Kutta Fehlberg.

## 6.2 EQUAÇÕES PARA DISCRETIZAR

### • Equação do Movimento

Partindo da equação do movimento (3.3-2)

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (6.2-1)$$

rescrevendo

$$r \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (6.2-2)$$

como a queda de pressão, (dP/dz) não varia na direção radial:

$$\int_0^r \frac{dP}{dz} \cdot r \cdot dr = \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \cdot dr \quad (6.2-3)$$

$$\frac{dP}{dz} \cdot \frac{r^2}{2} = r \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + c \quad (6.2-4)$$

usando a condição de contorno em (r = 0),  $\implies c = 0$

$$\frac{dP}{dz} \cdot \frac{r}{2} = \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (6.2-5)$$

Esta será a equação para discretizar as velocidades axiais

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r_i} = \frac{r_i}{2 \cdot \mu_i} \cdot \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{r_i} ; \quad r_i = (i-1) \cdot \Delta r \quad (6.2-6)$$



### • Equação da Energia

Partindo da equação da energia (3.3-3)

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (6.2-7)$$

abrindo a derivada com respeito a 'r'

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \left[ k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial k}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + r \cdot k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \quad (6.2-8)$$

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial k}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (6.2-9)$$

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \left( \frac{k}{r} + \frac{\partial k}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (6.2-10)$$

Equação para discretizar as temperaturas:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{r_i} = \frac{1}{\rho_i \cdot \hat{c}_{p_i} \cdot v_{z_i}} \cdot \left[ \left( \left. \frac{\partial k}{\partial r} \right|_{r_i} + \frac{k_i}{r_i} \right) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} + k_i \cdot \left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{r_i} \right] \quad (6.2-11)$$

exceto para  $r = 0$ . Nesse caso, usando o teorema de L'Hospital:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{r=0} = \frac{2}{\rho_i \cdot \hat{c}_{p_i} \cdot v_{z_i}} \cdot \left[ \frac{\partial k}{\partial r} \cdot \frac{\partial k_i}{\partial r_i} + k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \quad (6.2-12)$$

Entretanto a Equação ( 6.2-12 ) não foi utilizada, ( vide seção 6.5; pag. 38 )

### • Equação da Continuidade

Partindo da equação da continuidade (3.3-1)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) = 0 \quad (6.2-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho \cdot r \cdot v_r) = -r \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z) \quad (6.2-14)$$

abrindo a derivada

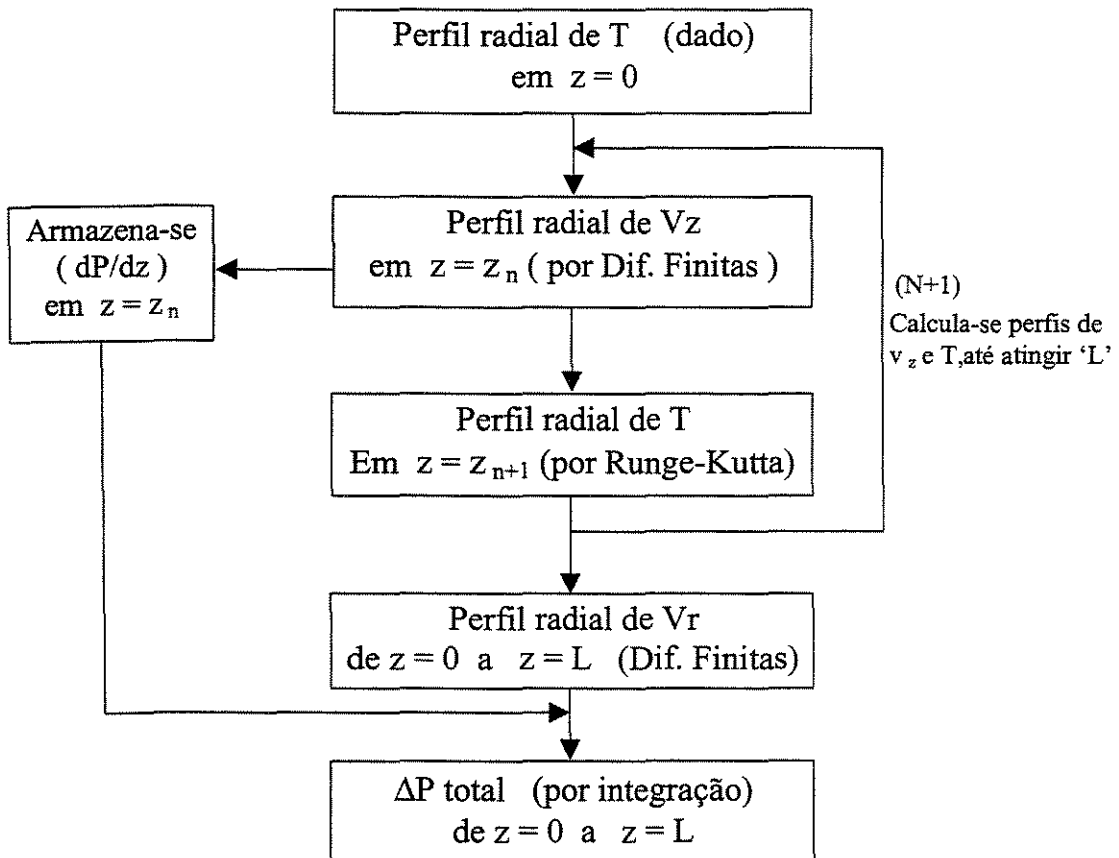
$$\rho \cdot v_r + r \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\rho \cdot v_r) = -r \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z) \quad (6.2-15)$$

Portanto, a equação para discretizar as velocidades axiais e radiais, que será usada para o cálculo das velocidades radiais, uma vez que já se conheça  $v_z$ , é dado por:

$$\rho_i \cdot v_{r_i} + r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_r)}{\partial r} \Big|_{r_i} = -r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \Big|_{r_i} \quad (6.2-16)$$

### 6.3 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO

#### Fluxograma



- **Em  $z = 0$  ( $n = 1$ )**

Como dado de entrada do problema, é fornecido o perfil uniforme de temperatura.

$$\text{Dado : } T_m \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

Com essas temperaturas (em  $n = 1$ ), são calculadas as propriedades físicas, o perfil de velocidade na componente axial ( $V_z$ ) e o gradiente de pressão ( $dP/dz$ ).

$$\rho_m, \mu_m, k_m, C_{p_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{Calculado: } V_{z_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$(dP/dz)_{n=1} ; \text{ cte. para } m = (1, 2, \dots, 11)$$

- **Em  $n = 2$**

Com as velocidades que foram calculadas no ponto anterior, calcula-se por Runge-Kutta o perfil de temperatura em  $n = 2$ .

$$\text{Calculado: } T_m \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

tendo o perfil de temperatura em ( $n=2$ ), pode-se calcular para o mesmo ponto axial:

$$\rho_m, \mu_m, k_m, C_{p_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{calculados: } V_{z_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$(dP/dz)_{n=2} ; \text{ cte. para } m = (1, 2, \dots, 11)$$

- **Em  $n = 3$**

Com as velocidades do ponto anterior e fazendo uso de Runge-Kutta, é calculado o perfil de temperatura em  $n = 3$ .

$$\text{Calculado: } T_m \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

Tendo o perfil de temperatura em ( $n=3$ ), pode-se calcular para o mesmo ponto axial :

$$\rho_m, \mu_m, k_m, C_{p_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{calculados: } Vz_m \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$(dP/dz)_{n=3} ; \text{ cte. para } m = (1, 2, \dots, 11)$$

Assim vão-se calculando os perfis de velocidade axial ( $v_z$ ), de temperatura e gradientes de pressão ( $-dP/dz$ ), até atingir o comprimento 'L' de tubo desejado.

Havendo calculado e armazenado as velocidades axiais ( $v_z$ ) no procedimento anterior, a seguir calculam-se as velocidades na componente radial ( $v_r$ ), fazendo uso da equação da continuidade.

$$\text{Calcula-se em cada ponto } n : Vr_m ; m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{desde } z = 0 \text{ (n=1) até } L \text{ (N)}$$

O cálculo de  $v_r$  não é feito simultaneamente com o cálculo de  $v_z$ . A velocidade axial  $v_z$  foi primeiramente calculada ao longo do comprimento do tubo e, depois, a partir destas velocidades calculou-se  $v_r$ .

Os gradientes de pressão  $(dP/dz)_n$  foram calculados e armazenados para todos os pontos 'n' desde  $z = 0$  até  $L$ . O cálculo da queda de pressão total, é obtido por integrar-se  $(-dP/dz)$ , desde  $z = 0$  até  $z = L$ .

## 6.4 CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE AXIAL ' $v_z$ '

Discretização da Equação (6.2-6):

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r_i} = \frac{r_i}{2 \cdot \mu_i} \cdot \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{r_i} ; r_i = (i-1) \cdot \Delta r \quad (6.4-1)$$

Dado o perfil radial  $T_i$ , calcula-se  $\mu_i = \mu_i(T)$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, 11$

A seguir:

- **Para  $i = 1$       ( $r_1 = 0$ )**

Da condição de contorno, no centro do tubo:

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{discretizando:}$$

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot [-25 \cdot v_{z1} + 48 \cdot v_{z2} - 36 \cdot v_{z3} + 16 \cdot v_{z4} - 3 \cdot v_{z5}] = 0$$

- **Para  $i = 11$       ( $r_{11} = R$ )**

Da condição de contorno na parede :

$$v_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{z11} = 0$$

- **Para  $i = 2$       ( $r_2 = \Delta r$ )**

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot v_{z1} - 10 \cdot v_{z2} + 18 \cdot v_{z3} - 6 \cdot v_{z4} + v_{z5}) - \frac{1 \cdot \Delta r}{2 \cdot \mu_2} \cdot \frac{dP}{dz} = 0$$

- **Para  $i = 10$       ( $r_{10} = 9 \cdot \Delta r$ )**

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-v_{z7} + 6 \cdot v_{z8} - 18 \cdot v_{z9} + 10 \cdot v_{z10} + 3 \cdot v_{z11}) - \frac{9 \cdot \Delta r}{2 \cdot \mu_{10}} \cdot \frac{dP}{dz} = 0$$

- **Para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$       ( $r_i = (i - 1) \cdot \Delta r$ )**

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (v_{z(i-2)} - 8 \cdot v_{z(i-1)} + 8 \cdot v_{z(i+1)} - v_{z(i+2)}) - \frac{(i-1) \cdot \Delta r}{2 \cdot \mu_i} \cdot \frac{dP}{dz} = 0$$

A equação da conservação da quantidade de movimento gera um sistema de equações com onze velocidades a serem determinadas, mais a queda de pressão; de forma que, tem-se 12 incógnitas e 11 equações provenientes da conservação da quantidade de movimento. Uma equação adicional é obtida através de um balanço de massa na seção transversal do tubo. Sendo 'm' a quantidade de fluido percorrendo uma determinada seção ao longo do tubo:

$$\dot{m} = \int_0^R \rho \cdot v_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr = 2\pi \cdot \int_0^R \rho \cdot v_z \cdot r \, dr \quad (6.4-2)$$

Integrando por Simpson:

$$\dot{m} = \frac{\Delta r}{3} \cdot 2\pi [\rho_1 \cdot v_{z1} \cdot r_1 + 4 \cdot \rho_2 \cdot v_{z2} \cdot r_2 + 2 \cdot \rho_3 \cdot v_{z3} \cdot r_3 + 4 \cdot \rho_4 \cdot v_{z4} \cdot r_4 \dots$$

$$\dots + 2 \cdot \rho_5 \cdot v_{z5} \cdot r_5 + 4 \cdot \rho_6 \cdot v_{z6} \cdot r_6 + 2 \cdot \rho_7 \cdot v_{z7} \cdot r_7 \dots$$

$$\dots + 4 \cdot \rho_8 \cdot v_{z8} \cdot r_8 + 2 \cdot \rho_9 \cdot v_{z9} \cdot r_9 + 4 \cdot \rho_{10} \cdot v_{z10} \cdot r_{10} + \rho_{11} \cdot v_{z11} \cdot r_{11}$$

Chega-se então a um sistema de 12 equações lineares com 12 incógnitas para determinar:

$$(v_{z1}, v_{z2}, v_{z3}, v_{z4}, v_{z5}, v_{z6}, v_{z7}, v_{z8}, v_{z9}, v_{z10}, v_{z11}, \partial P / \partial z)$$

**Sistema de equações geradas para o cálculo de  $v_z$**

$$(1) \quad -25 \cdot v_{z1} + 48 \cdot v_{z2} - 36 \cdot v_{z3} + 16 \cdot v_{z4} - 3 \cdot v_{z5} = 0$$

$$(2) \quad \frac{3}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z1} + \frac{10}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z2} - \frac{18}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z3} + \frac{6}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z4} - \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z5} + \frac{r_2}{2 \cdot \mu_2} \cdot \frac{dP}{dz} = 0$$

de (3) a (9):

$$-\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z(i-2)} + \frac{8}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z(i-1)} - \frac{8}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z(i+1)} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z(i+2)} + \frac{r_i}{2 \cdot \mu_i} \cdot \frac{dP}{dz} = 0$$

(10)

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z7} - \frac{6}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z8} + \frac{18}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z9} - \frac{10}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z10} - \frac{3}{12 \cdot \Delta r} \cdot v_{z11} + \frac{r_{10}}{2 \cdot \mu_{10}} \cdot \frac{dP}{dz} = 0$$

$$(11) \quad 1 \cdot v_{z11} = 0$$

$$(12) \quad \rho_1 \cdot r_1 \cdot v_{z1} + 4 \cdot \rho_2 \cdot r_2 \cdot v_{z2} + 2 \cdot \rho_3 \cdot r_3 \cdot v_{z3} + 4 \cdot \rho_4 \cdot r_4 \cdot v_{z4} \dots$$

$$\dots + 2 \cdot \rho_5 \cdot v_{z5} \cdot r_5 + 4 \cdot \rho_6 \cdot v_{z6} \cdot r_6 + 2 \cdot \rho_7 \cdot v_{z7} \cdot r_7 \dots$$

$$\dots + 4 \cdot \rho_8 \cdot r_8 \cdot v_{z8} + 2 \cdot \rho_9 \cdot r_9 \cdot v_{z9} + 4 \cdot \rho_{10} \cdot r_{10} \cdot v_{z10} + \rho_{11} \cdot r_{11} \cdot v_{z11} = \dot{m} \cdot \frac{3}{2\pi \cdot \Delta r}$$

Sistema de 12 equações lineares que é determinado por eliminação de Gauss.

Este cálculo do perfil de  $v_z$  é utilizado como uma sub-rotina no cálculo do perfil de temperatura. Para cada passo no método de Runge-Kutta-Fehlberg, calcula-se  $v_z$  6 vezes.

## 6.5 CÁLCULO DO PERFIL DE TEMPERATURA

Discretização da Equação (6.2-11):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{ri} = \frac{1}{\rho_i \cdot \hat{c}_{pi} \cdot v_{zi}} \cdot \left[ \left( \left. \frac{\partial k}{\partial r} \right|_{ri} + \frac{k_i}{r_i} \right) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{ri} + k_i \cdot \left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{ri} \right] \quad (6.5-1)$$

Tendo calculado no ponto axial anterior, o perfil de velocidade axial ( $v_z$ ), e as propriedades em função da temperatura. Para o cálculo do perfil de temperatura, discretiza-se:

- Para  $i = 1$  ( $r_1 = 0$ )

Da condição de contorno, no centro do tubo:

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{discretizando:}$$

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot [-25 \cdot T_1 + 48 \cdot T_2 - 36 \cdot T_3 + 16 \cdot T_4 - 3 \cdot T_5] = 0$$

isolando  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{48 \cdot T_2 - 36 \cdot T_3 + 16 \cdot T_4 - 3 \cdot T_5}{25}$$

• **Para  $i = 11$  ( $r_{11} = R$ )**

Da condição de contorno na parede, onde o calor de condução é igual ao calor por convecção:

$$k_{11} \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot [3 \cdot T_7 - 16 \cdot T_8 + 36 \cdot T_9 - 48 \cdot T_{10} + 25 \cdot T_{11}] = h \cdot (T_w - T_{11})$$

onde:

$T_w$  = temperatura da parede do tubo.

Isolando  $T_{11}$  :

$$T_{11} = \left( -3 \cdot T_7 + 16 \cdot T_8 - 36 \cdot T_9 + 48 \cdot T_{10} + \frac{12 \cdot \Delta r \cdot h}{k_{11}} \cdot T_w \right) \cdot \left( \frac{k_{11}}{25 \cdot k_{11} + 12 \cdot \Delta r \cdot h} \right)$$

• **Para  $i = 2$  ( $r_2 = \Delta r$ )**

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dz} = & \frac{1}{\rho_2 \cdot \hat{c}_{p2} \cdot v_{z2}} \left\{ \left[ \frac{k_2}{r_2} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot k_1 - 10 \cdot k_2 + 18 \cdot k_3 - 6 \cdot k_4 + k_5) \right] * \right. \\ & \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot T_1 - 10 \cdot T_2 + 18 \cdot T_3 - 6 \cdot T_4 + T_5) \\ & \left. + \frac{k_2}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (11 \cdot T_1 - 20 \cdot T_2 + 6 \cdot T_3 + 4 \cdot T_4 - T_5) \right\} \end{aligned}$$

• **Para  $i = 10$  ( $r_{10} = 9 \cdot \Delta r$ )**

$$\begin{aligned} \frac{dT_{10}}{dz} = & \frac{1}{\rho_{10} \cdot \hat{c}_{p10} \cdot v_{z10}} \cdot \left\{ \left[ \frac{k_{10}}{r_{10}} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-k_7 + 6 \cdot k_8 - 18 \cdot k_9 + 10 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{11}) \right] * \right. \\ & \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-T_7 + 6 \cdot T_8 - 18 \cdot T_9 + 10 \cdot T_{10} + 3 \cdot T_{11}) \\ & \left. + \frac{k_{10}}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-T_7 + 4 \cdot T_8 + 6 \cdot T_9 - 20 \cdot T_{10} + 11 \cdot T_{11}) \right\} \end{aligned}$$



- Para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ( $r_i = (i - 1) \cdot \Delta r$ )

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dz} = & \frac{1}{\rho_i \cdot \hat{c}_{pi} \cdot v_{zi}} \cdot \left\{ \left[ \frac{k_i}{r_i} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (k_{(i-2)} - 8 \cdot k_{(i-1)} + 8 \cdot k_{(i+1)} - k_{(i+2)}) \right] * \right. \\ & \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (T_{(i-2)} - 8 \cdot T_{(i-1)} + 8 \cdot T_{(i+1)} - T_{(i+2)}) \\ & \left. + \frac{k_i}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-T_{(i-2)} + 16 \cdot T_{(i-1)} - 30 \cdot T_i + 16 \cdot T_{(i+1)} - T_{(i+2)}) \right\} \end{aligned}$$

A discretização da Equação (6.2-11) acima, gerou nove equações diferenciais ordinárias e duas equações algébricas, sendo que as equações algébricas provêm da discretização no centro e na parede do tubo. Isolando  $T_1$  e  $T_{11}$  o sistema de equações fica:

**Sistema de equações para o cálculo da temperatura .**

- $T_1 = \frac{48 \cdot T_2 - 36 \cdot T_3 + 16 \cdot T_4 - 3 \cdot T_5}{25}$
- $T_{11} = \left( -3 \cdot T_7 + 16 \cdot T_8 - 36 \cdot T_9 + 48 \cdot T_{10} + \frac{12 \cdot \Delta r \cdot h}{k_{11}} \cdot T_w \right) \cdot \left( \frac{k_{11}}{25 \cdot k_{11} + 12 \cdot \Delta r \cdot h} \right)$
- $\frac{dT_2}{dz} = \frac{1}{\rho_2 \cdot \hat{c}_{p2} \cdot v_{z2}} \cdot \left\{ \left[ \frac{k_2}{r_2} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot k_1 - 10 \cdot k_2 + 18 \cdot k_3 - 6 \cdot k_4 + k_5) \right] * \right.$   
 $\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot T_1 - 10 \cdot T_2 + 18 \cdot T_3 - 6 \cdot T_4 + T_5)$   
 $\left. + k_2 \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (11 \cdot T_1 - 20 \cdot T_2 + 6 \cdot T_3 + 4 \cdot T_4 - T_5) \right\}$

para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{dT_i}{dz} &= \frac{1}{\rho_i \cdot \hat{c}_{pi} \cdot v_{zi}} \cdot \left\{ \left[ \frac{k_i}{r_i} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (k_{(i-2)} - 8 \cdot k_{(i-1)} + 8 \cdot k_{(i+1)} - k_{(i+2)}) \right] * \right. \\
 &\quad \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (T_{(i-2)} - 8 \cdot T_{(i-1)} + 8 \cdot T_{(i+1)} - T_{(i+2)}) \\
 &\quad \left. + k_3 \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-T_{(i-2)} + 16 \cdot T_{(i-1)} - 30 \cdot T_{(i)} + 16 \cdot T_{(i+1)} - T_{(i+2)}) \right\} \\
 \\
 \bullet \quad \frac{dT_{10}}{dz} &= \frac{1}{\rho_{10} \cdot \hat{c}_{p10} \cdot v_{z10}} \left\{ \left[ \frac{k_i}{r_{10}} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} (-k_7 + 6k_8 - 18k_9 + 10k_{10} + 3k_{11}) \right] * \right. \\
 &\quad \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-T_7 + 6 \cdot T_8 - 18 \cdot T_9 + 10 \cdot T_{10} + 3 \cdot T_{11}) \\
 &\quad \left. + k_{10} \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-T_7 + 4 \cdot T_8 + 6 \cdot T_9 - 20 \cdot T_{10} + 11 \cdot T_{11}) \right\}
 \end{aligned}$$

O perfil de temperatura (de  $T_1$  a  $T_{11}$ ) no início do tubo em  $z = 0$  ou  $n = 1$  é conhecido, por ser dado do problema. A seguir determina-se o sistema das 9 equações diferenciais ordinárias por Runge – Kutta Fehlberg, encontrando assim no seguinte ponto axial ( $n = 2$ ) as temperaturas de  $T_2$  a  $T_{10}$ , sendo que nesse mesmo ponto axial pode-se determinar  $T_1$  e  $T_{11}$  a partir das equações algébricas.

Sendo conhecido o perfil de temperatura (de  $T_1$  a  $T_{11}$ ) em um ponto axial ( $n = 2$ ), determina-se no ponto axial seguinte ( $n = 3$ ) as temperaturas de  $T_2$  a  $T_{10}$  por Runge – Kutta do sistema de 9 equações diferenciais ordinárias, e para esse mesmo ponto axial ( $n = 3$ ) determina-se  $T_1$  e  $T_{11}$  das equações algébricas. Desta maneira vão se encontrando o perfil de temperaturas para cada ponto axial, até o ponto  $n = N+1$  ou comprimento total do tubo ‘L’.

## 6.6 CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE RADIAL 'v<sub>r</sub>'

Discretização da Equação (6.2-16):

$$\rho_i \cdot v_{r_i} + r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_r)}{\partial r} \Big|_{r_i} = -r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \Big|_{r_i} \quad (6.6-1)$$

Para uma variável  $X_{(n,i)}$ , tem-se que:

$n$  : indica a posição axial (em  $z$ ), pontos da malha, de  $z = 0$  a  $z = L$        $n = 1, 2, \dots, N+1$

$i$  : indica a posição radial (em  $r$ ), pontos da malha de  $r = 0$  a  $r = R$        $i = 1, 2, \dots, 11$

• **Para  $i = 1$     ( $r_1 = 0$ )**

Substituindo  $r_1 = 0$  na equação :

$$\rho_1 \cdot v_{r1} + r_1 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_r)}{\partial r} = -r_1 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z}$$

$$\rho_1 \cdot v_{r1} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{r1} = 0$$

• **Para  $i = 2$     ( $r_2 = \Delta r$ )**

$$\rho_2 \cdot v_{r2} + \frac{r_2}{12 \cdot \Delta r} (-3\rho_{(n,1)} \cdot v_{r1} - 10\rho_{(n,2)} \cdot v_{r2} + 18\rho_{(n,3)} \cdot v_{r3} - 6\rho_{(n,4)} \cdot v_{r4} + \rho_{(n,5)} v_{r5}) =$$

$$\dots - r_2 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \Big|_{r_2}$$

• **Para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$     ( $r_i = (i - 1) \cdot \Delta r$ )**

$$\rho_{(n,i)} \cdot v_{ri} + \frac{r_i}{12 \cdot \Delta r} (\rho_{(n,i-2)} v_{r(i-2)} - 8 \cdot \rho_{(n,i-1)} v_{r(i-1)} + 8 \cdot \rho_{(n,i+1)} v_{r(i+1)} - \rho_{(n,i+2)} v_{r(i+2)}) =$$

$$\dots - r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \Big|_{r_i}$$

- Para  $i = 10$  ( $r_{10} = 9 \cdot \Delta r$ )

$$\rho_{10} \cdot v_{r10} + \frac{r_{10}}{12 \cdot \Delta r} \left( -7\rho_{(n,7)} v_{r7} + 6\rho_{(n,8)} v_{r8} - 18\rho_{(n,9)} v_{r9} + 10\rho_{(n,10)} v_{r10} + 3\rho_{(n,11)} v_{r11} \right) =$$

$$\dots - r_{10} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) \Big|_{z_n}^{r_{10}}$$

- Para  $i = 11$  ( $r = R$ )

Da condição de contorno na parede:

$$V_r = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{r11} = 0$$

Agora, o lado direito da Equação (6.6-1):

$$-r_i \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) \Big|_{z_n}^{r_i} = \dots$$

Para cada valor de 'n' varre o raio de  $i = 1$  até  $i = 11$ . Assim :

- Para  $n = 1$  ( $z = 0$ )

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ -25 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot v_{z(n,i)} + 48 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot v_{z(n+1,i)} \right.$$

$$\left. - 36 \cdot \rho_{(n+2,i)} \cdot v_{z(n+2,i)} + 16 \cdot \rho_{(n+3,i)} \cdot v_{z(n+3,i)} - 3 \cdot \rho_{(n+4,i)} \cdot v_{z(n+4,i)} \right]$$

- Para  $n = 2$

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ -3 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot v_{z(n-1,i)} - 10 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot v_{z(n,i)} \right.$$

$$\left. + 18 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot v_{z(n+1,i)} - 6 \cdot \rho_{(n+2,i)} \cdot v_{z(n+2,i)} + \rho_{(n+3,i)} \cdot v_{z(n+3,i)} \right]$$

• Para  $n = N$

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ -\rho_{(n-3,i)} \cdot v_{z(n-3,i)} + 6 \cdot \rho_{(n-2,i)} \cdot v_{z(n-2,i)} \right. \\ \left. - 18 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot v_{z(n-1,i)} + 10 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot v_{z(n,i)} + 3 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot v_{z(n+1,i)} \right]$$

• Para  $n = N+1$

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ 3 \cdot \rho_{(n-4,i)} \cdot v_{z(n-4,i)} - 16 \cdot \rho_{(n-3,i)} \cdot v_{z(n-3,i)} \right. \\ \left. + 36 \cdot \rho_{(n-2,i)} \cdot v_{z(n-2,i)} - 48 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot v_{z(n-1,i)} + 25 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot v_{z(n,i)} \right]$$

• Para  $(N-1) \Rightarrow n \geq 3$  (para o resto dos pontos no meio da malha)

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ \rho_{(n-2,i)} \cdot v_{z(n-2,i)} - 8 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot v_{z(n-1,i)} \right. \\ \left. + 8 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot v_{z(n+1,i)} - \rho_{(n+2,i)} \cdot v_{z(n+2,i)} \right]$$

Feita a discretização da Equação (6.2-16), viu-se que o lado direito da equação está em função do raio e do comprimento do tubo. Para facilitar, apresenta-se a seguir o sistema de equações geradas da discretização da Equação (6.2-16), para o valor de  $n = 1$ .

As equações geradas são : (exemplo para  $n = 1$ )

$$(1) \quad v_{r1} = 0$$

$$(2) \quad -3\rho_{(n,1)} \cdot v_{r1} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_2} - 10 \right) \rho_{(n,2)} \cdot v_{r2} + 18\rho_{(n,3)} \cdot v_{r3} - 6\rho_{(n,4)} \cdot v_{r4} + \rho_{(n,5)} \cdot v_{r5} = \\ -\frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \left( -25 \cdot \rho_{(1,2)} \cdot v_{z(1,2)} + 48 \cdot \rho_{(2,2)} \cdot v_{z(2,2)} - 36 \cdot \rho_{(3,2)} \cdot v_{z(3,2)} \right. \\ \left. + 16 \cdot \rho_{(4,2)} \cdot v_{z(4,2)} - 3 \cdot \rho_{(5,2)} \cdot v_{z(5,2)} \right)$$

**Equações 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)**

$$\rho_{(1,i-2)} \cdot v_{r(i-2)} - 8 \cdot \rho_{(1,i-1)} \cdot v_{r(i-1)} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_i} \right) \cdot \rho_{(1,i)} \cdot v_{r(i)} + 8 \cdot \rho_{(1,i+1)} \cdot v_{r(i+1)} - \rho_{(1,i+2)} \cdot v_{r(i+2)} =$$

$$- \frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \left( -25 \cdot \rho_{(1,i)} \cdot v_{z(1,i)} + 48 \cdot \rho_{(2,i)} \cdot v_{z(2,i)} - 36 \cdot \rho_{(3,i)} \cdot v_{z(3,i)} \right.$$

$$\left. + 16 \cdot \rho_{(4,i)} \cdot v_{z(4,i)} - 3 \cdot \rho_{(5,i)} \cdot v_{z(5,i)} \right)$$

$$(10) \quad -\rho_{(1,7)} \cdot v_{r7} + 6 \cdot \rho_{(1,8)} \cdot v_{r8} - 18 \cdot \rho_{(1,9)} \cdot v_{r9} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_{10}} + 10 \right) \cdot \rho_{(1,10)} \cdot v_{r10}$$

$$+ 3 \cdot \rho_{(1,11)} \cdot v_{z11} = - \frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \left( -25 \cdot \rho_{(1,10)} \cdot v_{z(1,10)} + 48 \cdot \rho_{(2,1)} \cdot v_{z(2,10)} - 36 \cdot \rho_{(3,10)} \cdot v_{z(3,10)} \right.$$

$$\left. + 16 \cdot \rho_{(4,10)} \cdot v_{z(4,10)} - 3 \cdot \rho_{(5,10)} \cdot v_{z(5,10)} \right)$$

$$(11) \quad 1. V_{Z11} = 0$$

O sistema de equações lineares acima é determinado pelo método de eliminação de Gauss.

**6.7 CÁLCULO DA QUEDA DE PRESSÃO**

Foi acrescentado ao sistema de equações para a obtenção de  $v_z$  o cálculo de  $(dP/dz)$  que corresponde ao diferencial da pressão na seção transversal, visto que  $P = P(z)$ .

O cálculo da pressão é então obtido por se integrar numericamente os valores obtidos para os diferenciais da pressão ao longo do tubo.

Integrando-se o gradiente de pressão em  $z$ , desde 0 até  $L$ , através do método de Simpson tem-se que:

**Equações 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)**

$$\rho_{(1,i-2)} \cdot v_{r(i-2)} - 8 \cdot \rho_{(1,i-1)} \cdot v_{r(i-1)} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_i} \right) \cdot \rho_{(1,i)} \cdot v_{r(i)} + 8 \cdot \rho_{(1,i+1)} \cdot v_{r(i+1)} - \rho_{(1,i+2)} \cdot v_{r(i+2)} =$$

$$- \frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \left( -25 \cdot \rho_{(1,i)} \cdot v_{z(1,i)} + 48 \cdot \rho_{(2,i)} \cdot v_{z(2,i)} - 36 \cdot \rho_{(3,i)} \cdot v_{z(3,i)} \right.$$

$$\left. + 16 \cdot \rho_{(4,i)} \cdot v_{z(4,i)} - 3 \cdot \rho_{(5,i)} \cdot v_{z(5,i)} \right)$$

$$(10) \quad -\rho_{(1,7)} \cdot v_{r7} + 6 \cdot \rho_{(1,8)} \cdot v_{r8} - 18 \cdot \rho_{(1,9)} \cdot v_{r9} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_{10}} + 10 \right) \cdot \rho_{(1,10)} \cdot v_{r10}$$

$$+ 3 \cdot \rho_{(1,11)} \cdot v_{z11} = - \frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \left( -25 \cdot \rho_{(1,10)} \cdot v_{z(1,10)} + 48 \cdot \rho_{(2,1)} \cdot v_{z(2,10)} - 36 \cdot \rho_{(3,10)} \cdot v_{z(3,10)} \right.$$

$$\left. + 16 \cdot \rho_{(4,10)} \cdot v_{z(4,10)} - 3 \cdot \rho_{(5,10)} \cdot v_{z(5,10)} \right)$$

$$(11) \quad 1. V_{Z11} = 0$$

O sistema de equações lineares acima é determinado pelo método de eliminação de Gauss.

**6.7 CÁLCULO DA QUEDA DE PRESSÃO**

Foi acrescentado ao sistema de equações para a obtenção de  $v_z$  o cálculo de  $(dP/dz)$  que corresponde ao diferencial da pressão na seção transversal, visto que  $P = P(z)$ .

O cálculo da pressão é então obtido por se integrar numericamente os valores obtidos para os diferenciais da pressão ao longo do tubo.

Integrando-se o gradiente de pressão em  $z$ , desde 0 até  $L$ , através do método de Simpson tem-se que:

$$\Delta P = \int_0^L \left( \frac{dP}{dz} \right) dz \cong$$

$$\frac{\Delta z}{3} \cdot \left[ \left( \frac{dP}{dz} \right)_1 + 4 \cdot \left( \frac{dP}{dz} \right)_2 + 2 \cdot \left( \frac{dP}{dz} \right)_3 + 4 \cdot \left( \frac{dP}{dz} \right)_4 + \cdots + 4 \cdot \left( \frac{dP}{dz} \right)_N + \left( \frac{dP}{dz} \right)_{N+1} \right] \quad (6.7-1)$$



# Capítulo 7

## 7. CÁLCULO PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO

### 7.1 INTRODUÇÃO

O método de discretização, bem como a consideração de simetria no centro do tubo e o tamanho da malha que se adotaram para o cálculo do escoamento laminar (cap. 6), também são válidas e aplicáveis neste capítulo, como se mostra na Figura 7.1 para o cálculo do escoamento turbulento.

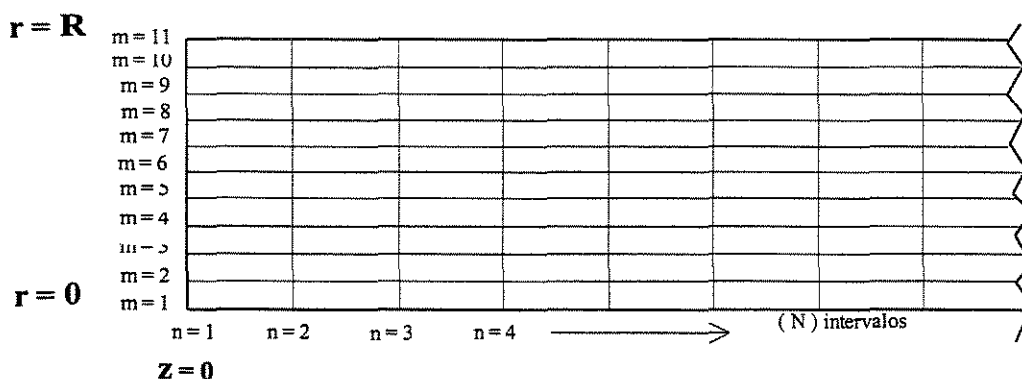


Figura 7.1 Malha para a discretização

A discretização no sentido radial 'r' utiliza o método das diferenças finitas de 4ª ordem, mas a integração no sentido axial 'z' é resolvido utilizando-se o método de Runge-Kutta-Fehlberg.

Os cálculos são feitos numericamente como no caso do escoamento laminar. Mas neste capítulo levam-se em consideração os tensores de Reynolds. Outra diferença está na solução da região próxima à parede, já que para o escoamento turbulento apresentam-se dois problemas. Um pelos altos gradientes próximos à parede e outro porque o modelo de Prandtl (adotado neste cálculo), não funciona muito bem na região bem próxima da parede. Pelas dificuldades apresentadas na região próxima da parede, a velocidade axial é calculada analiticamente (para  $v_z(N)$ ). A parte da solução analítica, é apresentada amplamente na seção 7.3 .

## 7.2 EQUAÇÕES PARA DISCRETIZAR

### • Equação do Movimento

Da equação do movimento (4.2.1-15)

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r_i} = \frac{\sqrt{\mu_i^2 + 2K_i r_i \rho_i f(r)_i} - \mu_i}{-2 \rho_i f(r)_i} \quad (7.2-1)$$

onde:

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2 \quad (7.2-2)$$

### • Equação da Energia

Da equação da energia (4.2.2-5)

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \bar{v}_z \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot (k + k_t) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right] \quad (7.2-3)$$

abrindo a derivada com respeito de 'r'

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \bar{v}_z \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \left[ (k + k_t) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial (k + k_t)}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + r \cdot (k + k_t) \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} \right] \quad (7.2-4)$$

ou

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \bar{v}_z \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{(k + k_t)}{r} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\partial (k + k_t)}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + (k + k_t) \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} \quad (7.2-5)$$

ou

$$\rho \cdot \hat{c}_p \cdot \bar{v}_z \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \left( \frac{(k + k_t)}{r} + \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{\partial k_t}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + (k + k_t) \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} \quad (7.2-6)$$

Equação para discretizar as temperaturas:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_{r_i} = \frac{1}{\rho_i \cdot \hat{c}_{p_i} \cdot v_{z_i}} \left[ \left( \frac{(k_i + k_{t_i})}{r_i} + \left. \frac{\partial k_i}{\partial r_i} \right|_{r_i} + \left. \frac{\partial k_{t_i}}{\partial r_i} \right|_{r_i} \right) \cdot \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right|_{r_i} + (k_i + k_{t_i}) \left. \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} \right|_{r_i} \right] \quad (7.2-7)$$

onde:

$$k_t = -\rho \cdot \hat{c}_p \cdot f(r) \cdot \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (7.2-8)$$

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2 \quad (7.2-9)$$

### • Equação da Continuidade

Partindo da equação da continuidade (4.2.3-1)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot \bar{v}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) = 0 \quad (7.2-10)$$

Como foi dito no capítulo 4, a equação da continuidade para o regime turbulento, não apresenta variações com a equação para o regime laminar, exceto que as velocidades são médias no tempo e não instantâneas. Assim a equação para a discretização fica:

$$\rho_i \cdot \bar{v}_{r_i} + r_i \cdot \left. \frac{\partial (\rho \cdot \bar{v}_r)}{\partial r} \right|_{r_i} = -r_i \cdot \left. \frac{\partial (\rho \cdot \bar{v}_z)}{\partial z} \right|_{r_i} \quad (7.2-11)$$

## 7.3 DIFICULDADES DE RESOLUÇÃO PRÓXIMO À PAREDE

O método apresentado para a resolução de problemas com escoamento laminar e turbulento em tubos é genérico e discretiza as equações em qualquer número de pontos que se desejar, pois a malha poderia constar de 100, 1000 pontos, ou qualquer outro número, dependendo do tempo computacional, do erro de máquina (para malhas com muitos pontos) e da precisão dos resultados desejados.

Neste trabalho usou-se uma malha de  $m_R = 11$  pontos (no raio) e  $n_z$  pontos (no comprimento). A escolha da malha foi adotada por simplicidade e para obter resultados com tempos de computação curtos. Entretanto, tomou-se cuidados para que a malha não fosse grosseira.

Observou-se que os cálculos para o escoamento com baixo número de Reynolds foram satisfatórios. Os cálculos para o escoamentos com números de Reynolds  $\leq 3000$  e com  $m_R = 11$  foi satisfatório. Porém, para números de Reynolds maiores deve-se usar maior número de pontos em 'r' (no raio). Isto por causa dos altos gradientes próximos à parede e porque o modelo de Prandtl não funciona muito bem na região bem próxima da parede (Bird, 1982).

Pelo explicado acima, e como alternativa ao incremento de pontos na malha, propõe-se uma solução analítica para a equação do momento, para o cálculo da velocidade axial ( $v_z$ ) na região próxima da parede (no caso para o ponto  $m_R = 10$ ).

No capítulo 5 do livro de fenômenos de transporte, Bird (1982), faz-se uma análise na região próxima à parede, onde chama-se de  $S^+$  à distância adimensional, medida desde a parede do tubo até uma posição qualquer em direção ao centro do tubo (distância pequena, precisamente na região próxima da parede).

$$S^+ = (R - r) \cdot \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\mu} \quad (7.3 - 1)$$

Onde:

$$\tau_o = \frac{K \cdot R}{2} ; \tau_o \text{ é a tensão de cisalhamento na parede (} r = R \text{)}$$

$$K = -\frac{dP}{dz}$$

A partir de dados experimentais verificou-se que para  $S^+ = 26 \Rightarrow V^+ = 12.85$

Onde:

$$V^+ = \bar{v}_z \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\tau_o}}$$

O que corresponde a :

$$\text{vale para } S^+ = 26 \left\{ \begin{array}{l} r_a = R - 26 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{K \cdot R}} \quad (7.3 - 2) \\ \bar{v}_{z(a)} = 12,85 \cdot \sqrt{\frac{K \cdot R}{2 \cdot \rho}} \quad (7.3 - 3) \end{array} \right.$$

Chamou-se de  $r_a$  e  $\bar{v}_{z(a)}$  ao raio e a velocidade axial, correspondentes a  $S^+ = 26$ .

**Para valores de  $S^+ \geq 26$ , faz-se a seguinte análise:**

Chama-se “S” a uma distância muito pequena, medida desde a parede do tubo

$$S = (R - r) \quad (7.3 - 4)$$

diferenciando a Equação (7.3-4) tem-se

$$dS = -dr \quad (7.3 - 5)$$

sendo que :

$$g = 0,14 - 0,08 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 0,06 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^4 \quad (7.3 - 6)$$

Fazendo-se uma expansão da serie de Taylor da Equação (7.3 -6) para  $r_0 = R$ , chega-se na expressão de Von Karman.

$$g = 0,4 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (\text{Von Karman}) \quad (7.3 - 7)$$

Fazem-se duas aproximações:

$$1) \quad r = R - S \cong R \quad (S \text{ é pequeno})$$

$$2) \quad g \cdot R \cong 0,4 \cdot (R - r) = 0,4 \cdot S \quad (\text{vem da Equação (7.3-7)}) \quad (7.3 - 8)$$

Substituindo a Equação (7.3 - 5) e a Equação (7.3 - 8) na Equação do momento (7.2 - 1)

$$-\frac{d\bar{v}_z}{dS} = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2 \cdot K \cdot \rho \cdot (0,4)^2 \cdot S^2 \cdot (R - S)}}{2 \cdot \rho \cdot (0,4)^2 \cdot S^2} \quad (7.3 - 9)$$

Como  $S \ll R \Rightarrow (R - S) \cong R$ , que vem da aproximação 1 :

$$\frac{d\bar{v}_z}{dS} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 0,32 \cdot K \cdot \rho \cdot R \cdot S^2} - \mu}{0,32 \cdot \rho \cdot S^2} \quad (7.3 - 10)$$

Fazendo-se uma análise de ordem de magnitude na raiz quadrada da Equação ( 7.3-10 ), observa-se que a viscosidade é desprezível frente ao outro termo para  $S \geq S_a$ , desta maneira:

$$\frac{d\bar{v}_z}{dS} = \frac{\sqrt{0,32 \cdot K \cdot \rho \cdot R \cdot S^2} - \mu}{0,32 \cdot \rho \cdot S^2} \quad (7.3 - 11)$$

Analisando a ordem de magnitude no numerador da Equação ( 7.3-11 ), encontra-se que a viscosidade pode ser desprezível frente ao outro termo para  $S \geq S_a$ , assim:

$$\frac{d\bar{v}_z}{dS} = \frac{\sqrt{0,32 \cdot K \cdot \rho \cdot R \cdot S^2}}{0,32 \cdot \rho \cdot S^2} = \sqrt{\frac{K \cdot R}{0,32 \cdot \rho}} \cdot \frac{1}{S} \quad (7.3 - 12)$$

Integrando a Equação ( 7.3-12 ) desde  $S_a$  até  $S_{n-1}$  :

$$\bar{v}_{z(n-1)} - \bar{v}_{z(a)} = \sqrt{\frac{K \cdot R}{0,32 \cdot \rho}} \cdot \text{Ln} \left( \frac{S_{n-1}}{S_a} \right) \quad (7.3 - 13)$$

Onde:

$$S_{n-1} = (R - r_{10}) = 0,1 \cdot R \quad (\text{para o caso específico de 11 pontos radiais})$$

$$S_a = 26 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{K \cdot R}} \quad (\text{vem da Equação (7.3 - 2)})$$

A velocidade axial desde  $S_a$  até  $S_{n-1}$  fica:

$$\bar{v}_{z(n-1)} - \bar{v}_{z(a)} = \sqrt{\frac{K \cdot R}{0,32 \cdot \rho}} \cdot \text{Ln} \left( \frac{0,1 \cdot R}{26 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{K \cdot R}}} \right) \quad (7.3 - 14)$$

Finalmente a expressão da velocidade axial desde a parede (  $r = R$  ) até um ponto próximo da parede, tem a forma:

$$\bar{v}_{z(n-1)} = 12,85 \cdot \sqrt{\frac{K \cdot R}{2 \cdot \rho}} + \sqrt{\frac{K \cdot R}{0,32 \cdot \rho}} \cdot \text{Ln} \left( \frac{S_{n-1}}{S_a} \right) \quad (7.3-15)$$

Para o caso de 11 pontos radiais (  $n_R = 11$  ):

$$\bar{v}_{z10} = 12,85 \cdot \sqrt{\frac{K \cdot R}{2 \cdot \rho}} + \sqrt{\frac{K \cdot R}{0,32 \cdot \rho}} \cdot \text{Ln} \left( \frac{0,1 \cdot R}{26 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{K \cdot R}}} \right) \quad (7.3-16)$$

Na Figura 7.2 mostra-se o perfil de velocidade axial ( $v_z$ ) em função do raio, onde a solução analítica na região próxima da parede ( ponto  $r_{10}$  ) será feita com a Equação (7.3-16), enquanto que a região compreendida desde o ponto (  $r_{10}$  ) até o centro do tubo ( $r_1$ ), será determinada numericamente, como se esquematiza na figura.

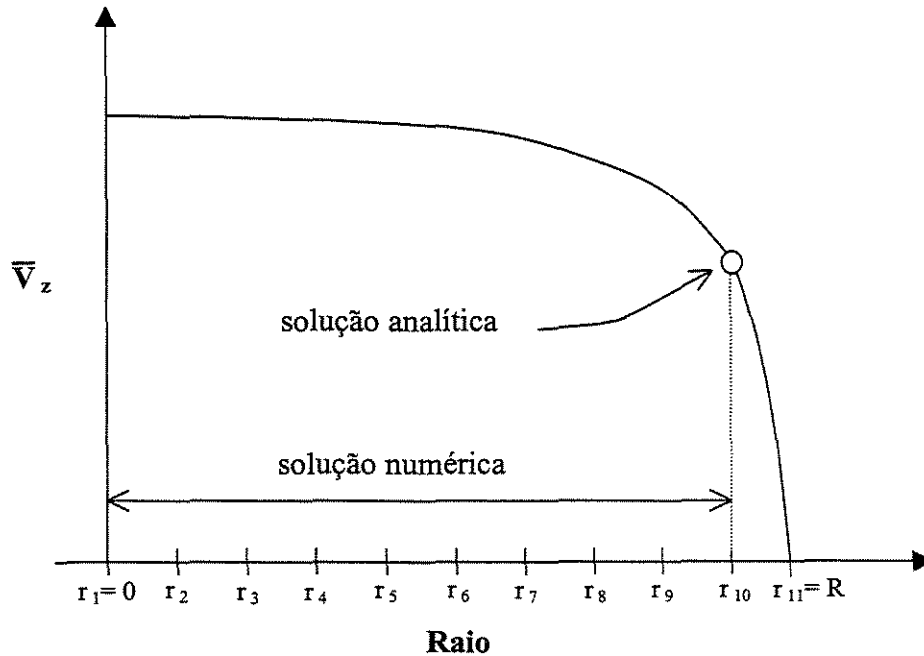


Figura 7.2 Perfil de velocidade axial ( $v_z$ ) em função do raio, mostrando o ponto que será calculado analiticamente.

Desta forma, os valores de contorno para região que será calculada numericamente são:

### Para a equação do Movimento

No eixo de simetria	$r = 0$	$\left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) = 0$
Próximo da parede	$r = (R - S_{n-1})$	$\bar{v}_z = \text{solução analítica da Equação (7.3 -16)}$
Ao longo do tubo	$0 \leq z \leq L$	$\dot{m} = \int_0^R \rho \cdot \bar{v}_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr$

Observe-se que a dedução da Equação (7.3 -16) foi feita considerando a densidade e a viscosidade como sendo constantes, mas isto não representará problema no modelo, já que para escoamentos turbulentos a diferença de temperatura entre os pontos ( $r = R$ ) e ( $r_{10}$ ) é muito pequena, podendo desta forma usar a Equação (7.3 -16) com a densidade à temperatura em ( $r_{10}$ ), ou a uma temperatura média na região próxima da parede.

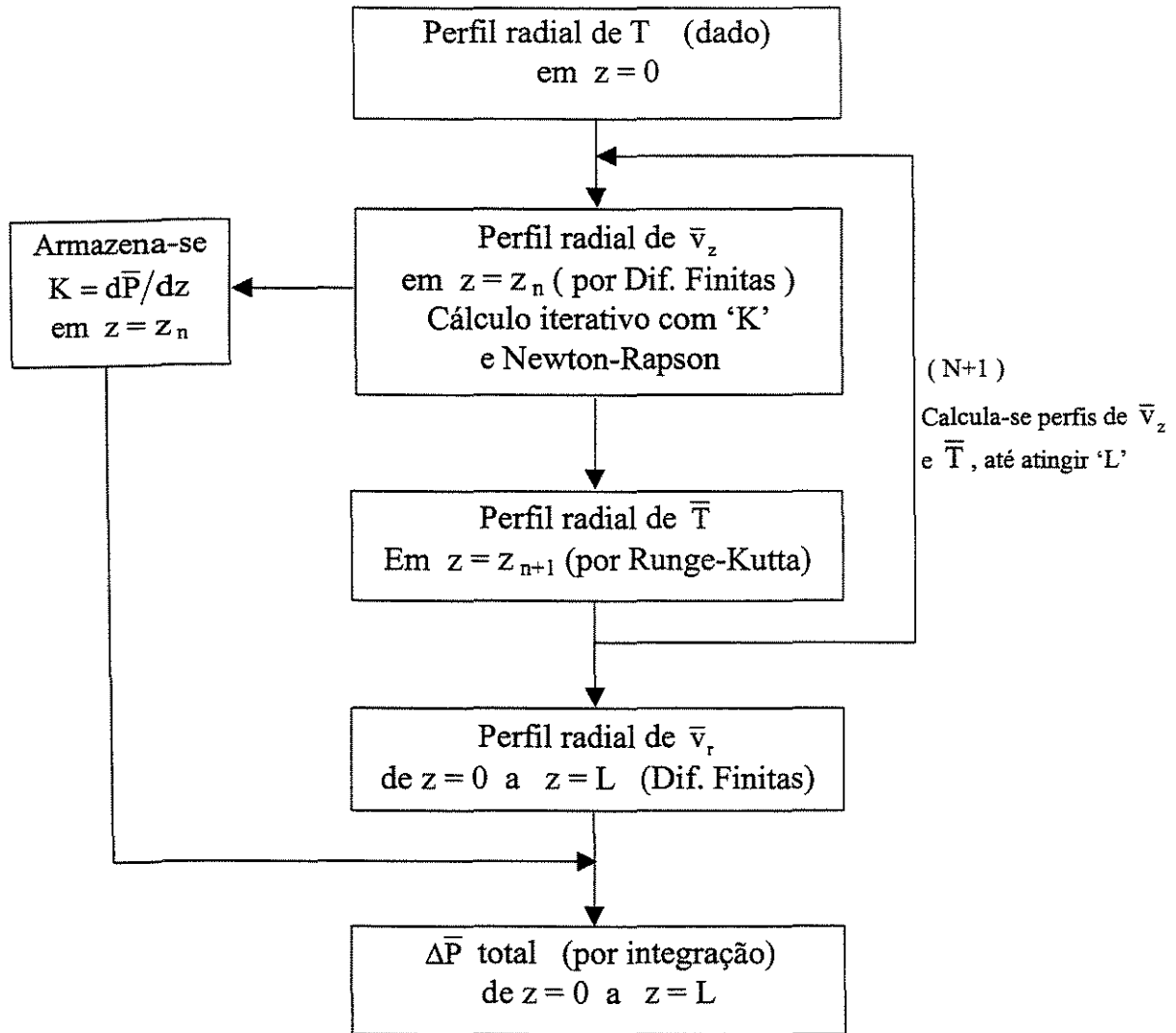
## 7.4 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO

O esquema de cálculo para o escoamento turbulento, basicamente é o mesmo que para o escoamento laminar, as diferenças estão no cálculo do perfil da velocidade axial ( $\bar{v}_z$ ) que neste caso é um cálculo iterativo, designando um valor inicial para 'K' ( $K = -d\bar{P}/dz$ ). Usa-se o método de Newton-Rapson para este cálculo iterativo. Outra das variantes neste mesmo cálculo é a solução analítica do ponto mais próximo da parede, como já foi explicado na seção anterior.

Para ajudar na compreensão do esquema de cálculo, faz-se uma explicação geral depois do Fluxograma, depois explica-se mais detalhadamente na seção dos cálculos dos perfis (seções 7.5 ; 7.6; 7.7) que se verá mais para frente.



## Fluxograma



- Em  $z = 0$  ( $n = 1$ )

Com o perfil de temperatura na entrada, que é fornecido como dado do problema.

Dado:  $T_m$   $m = (1, 2, \dots, 11)$

Calcula-se (em  $n = 1$ ), as propriedades físicas, o perfil de velocidade na componente axial ( $\bar{v}_z$ ) e  $K$ , sendo  $K$  o gradiente de pressão ( $-d\bar{P}/dz$ ).

$$\rho_m, \mu_m, k_m, C_{p_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{calculado} \quad \bar{v}_z \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$(d\bar{P}/dz)_{n=1} ; \quad \text{cte. para } m = (1, 2, \dots, 11)$$

- **Em  $n = 2$**

Com as velocidades axiais calculadas no ponto anterior, calcula-se por Runge-Kutta o perfil de temperatura em  $n = 2$ .

$$\text{calculado :} \quad \bar{T}_m \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

tendo o perfil de temperatura em ( $n=2$ ), pode-se calcular para o mesmo ponto axial :

$$\rho_m, \mu_m, k_m, C_{p_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{calculado:} \quad \bar{v}_{z\ m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$(d\bar{P}/dz)_{n=2} ; \quad \text{cte. para } m = (1, 2, \dots, 11)$$

- **Em  $n = 3$**

Com as velocidades axiais no ponto anterior e fazendo uso de Runge-Kutta, é calculado o perfil de temperatura em  $n = 3$ .

$$\text{calculado:} \quad \bar{T}_m \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

Tendo o perfil de temperatura em ( $n=3$ ), pode-se calcular para o mesmo ponto axial :

$$\rho_m, \mu_m, k_m, C_{p_m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$\text{calculado:} \quad \bar{v}_{z\ m} \quad m = (1, 2, \dots, 11)$$

$$(d\bar{P}/dz)_{n=3} ; \quad \text{cte. para } m = (1, 2, \dots, 11)$$

Assim vão-se calculando os perfis de velocidade axial ( $\bar{v}_z$ ), temperatura ( $\bar{T}$ ) e gradientes de pressão ( $-d\bar{P}/dz$ ), até atingir o comprimento 'L' de tubo desejado.

Só depois, calculam-se as velocidades na componente radial ( $\bar{v}_r$ ), sobre todos os pontos da malha desde  $z = 0$  até  $L$ , usando a equação da continuidade. Também é calculada a queda de pressão total, integrando os gradientes ( $-d\bar{P}/dz$ ) desde  $z = 0$  até  $L$ , que foram calculados e armazenados junto com o cálculo das velocidades axiais.

## 7.5 CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE AXIAL ' $\bar{v}_z$ '

Da Equação (7.2-1):

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r_i} = \frac{\sqrt{\mu_i^2 + 2K_i r_i \rho_i f(r)_i} - \mu_i}{-2 \rho_i f(r)_i} \quad (7.5-1)$$

onde:

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2 \quad (7.5-2)$$

$$K = -d\bar{P}/dz \quad (7.5-3)$$

Dado o perfil  $T_i$ , calcula-se  $\mu_i = \mu_i(T)$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, 11$

A seguir, faz-se a discretização desde  $(r_1)$  até  $(r_{10})$ :

- Para  $i = 1$  ( $r_1 = 0$ )

Da condição de contorno, no centro do tubo:

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{discretizando:}$$

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot [-25 \cdot \bar{v}_{z1} + 48 \cdot \bar{v}_{z2} - 36 \cdot \bar{v}_{z3} + 16 \cdot \bar{v}_{z4} - 3 \cdot \bar{v}_{z5}] = 0$$

- Para  $i = 2$  ( $r_2 = \Delta r$ )

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot \bar{v}_{z1} - 10 \cdot \bar{v}_{z2} + 18 \cdot \bar{v}_{z3} - 6 \cdot \bar{v}_{z4} + \bar{v}_{z5}) = \frac{\sqrt{\mu_2^2 + 2 \cdot K \cdot r_2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2} - \mu_2}{-2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2}$$

$$\text{Onde: } f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r_2}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r_2}{R} \right)^4 \right]^2$$

- Para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8$  ( $r_i = (i - 1) \cdot \Delta r$ )

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (\bar{v}_{z(i-2)} - 8 \cdot \bar{v}_{z(i-1)} + 8 \cdot \bar{v}_{z(i+1)} - \bar{v}_{z(i+2)}) = \frac{\sqrt{\mu_i^2 + 2 \cdot K \cdot r_i \cdot \rho_i \cdot f(r)_i} - \mu_i}{-2 \cdot \rho_i \cdot f(r)_i}$$

$$\text{Onde: } f(r)_i = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r_i}{R} \right)^4 \right]^2$$

- Para  $i = 9$  ( $r_9 = 8 \cdot \Delta r$ )

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-1 \cdot \bar{v}_{z6} + 6 \cdot \bar{v}_{z7} - 18 \cdot \bar{v}_{z8} + 10 \cdot \bar{v}_{z9} + 3 \cdot \bar{v}_{z10}) = \frac{\sqrt{\mu_9^2 + 2 \cdot K \cdot r_9 \cdot \rho_9 \cdot f(r)_9} - \mu_9}{-2 \cdot \rho_9 \cdot f(r)_9}$$

$$\text{Onde: } f(r)_9 = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r_9}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r_9}{R} \right)^4 \right]^2$$

- Para  $i = 10$  ( $r_{10} = 9 \cdot \Delta r$ )

Neste ponto o valor de  $v_{z10}$  é igual ao valor calculado a partir da Equação (7.3-16)

$$\bar{v}_{z10} = 12,85 \cdot \sqrt{\frac{K \cdot R}{2 \cdot \rho}} + \sqrt{\frac{K \cdot R}{0,32 \cdot \rho}} \cdot \text{Ln} \left( \frac{0,1 \cdot R}{26 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{K \cdot R}}} \right)$$

**Onde :**

$\rho, \mu$ , calculados no ponto 10

Chega-se então a um sistema de 10 equações lineares com 11 incógnitas a determinar. Um cálculo iterativo será feito, designando um valor inicial para  $K$ , desta maneira poderá ser determinado o sistema de equações embaixo:

$K$  : valor assumido

Incógnitas:  $\bar{v}_{z1}, \bar{v}_{z2}, \bar{v}_{z3}, \bar{v}_{z4}, \bar{v}_{z5}, \bar{v}_{z6}, \bar{v}_{z7}, \bar{v}_{z8}, \bar{v}_{z9}, \bar{v}_{z10}$

Sistema de equações geradas para o cálculo de  $\bar{v}_z$ :

$$(1) \quad -25 \cdot \bar{v}_{z_1} + 48 \cdot \bar{v}_{z_2} - 36 \cdot \bar{v}_{z_3} + 16 \cdot \bar{v}_{z_4} - 3 \cdot \bar{v}_{z_5} = 0$$

$$(2) \quad -3 \cdot \bar{v}_{z_1} - 10 \cdot \bar{v}_{z_2} + 18 \cdot \bar{v}_{z_3} - 6 \cdot \bar{v}_{z_4} + \bar{v}_{z_5} = 12 \cdot \Delta r \cdot \frac{\sqrt{\mu_2^2 + 2 \cdot K \cdot r_2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2} - \mu_2}{-2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2}$$

de (3) a (8):

$$\bar{v}_{z_{(i-2)}} - 8 \cdot \bar{v}_{z_{(i-1)}} + 8 \cdot \bar{v}_{z_{(i+1)}} - \bar{v}_{z_{(i+2)}} = 12 \cdot \Delta r \cdot \frac{\sqrt{\mu_i^2 + 2 \cdot K \cdot r_i \cdot \rho_i \cdot f(r)_i} - \mu_i}{-2 \cdot \rho_i \cdot f(r)_i}$$

$$(9) \quad -\bar{v}_{z_6} + 6 \cdot \bar{v}_{z_7} - 18 \cdot \bar{v}_{z_8} + 10 \cdot \bar{v}_{z_9} + 3 \cdot \bar{v}_{z_{10}} = 12 \cdot \Delta r \cdot \frac{\sqrt{\mu_9^2 + 2 \cdot K \cdot r_9 \cdot \rho_9 \cdot f(r)_9} - \mu_9}{-2 \cdot \rho_9 \cdot f(r)_9}$$

$$(10) \quad \bar{v}_{z_{10}} = \text{valor calculado a partir da Equação (7.3-16)}$$

Resolvendo o sistema linear acima por eliminação de Gauss, determina-se as 10 velocidades. Como foi assumido um valor de K que é desconhecido, é necessário satisfazer a seguinte condição de contorno:

$$\dot{m} = \int_0^R \rho \cdot \bar{v}_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr \quad (7.5-1)$$

Integrando por Simpson: ( neste caso  $\bar{v}_{z_{11}} = 0$  )

$$\dot{m} = \frac{\Delta r}{3} \cdot 2\pi \left[ \rho_1 \cdot \bar{v}_{z_1} \cdot r_1 + 4 \cdot \rho_2 \cdot \bar{v}_{z_2} \cdot r_2 + 2 \cdot \rho_3 \cdot \bar{v}_{z_3} \cdot r_3 + 4 \cdot \rho_4 \cdot \bar{v}_{z_4} \cdot r_4 \cdots \right.$$

$$\cdots + 2 \cdot \rho_5 \cdot \bar{v}_{z_5} \cdot r_5 + 4 \cdot \rho_6 \cdot \bar{v}_{z_6} \cdot r_6 + 2 \cdot \rho_7 \cdot \bar{v}_{z_7} \cdot r_7 \cdots$$

$$\left. \cdots + 4 \cdot \rho_8 \cdot \bar{v}_{z_8} \cdot r_8 + 2 \cdot \rho_9 \cdot \bar{v}_{z_9} \cdot r_9 + 4 \cdot \rho_{10} \cdot \bar{v}_{z_{10}} \cdot r_{10} + \rho_{11} \cdot \bar{v}_{z_{11}} \cdot r_{11} \right] \quad (7.5-2)$$

Pode-se calcular o valor de  $F(K)$ :

$$F(K) = m - \int_0^R \rho \cdot \bar{v}_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr \quad (7.5-3)$$

Se  $F(K) = 0$ , então  $K$  é o valor desejado. Caso contrário, deve-se usar o método de Newton-Rapson:

$$K^{(n+1)} = K^{(n)} - \frac{F(K^{(n)})}{F'(K^{(n)})} \quad (7.5-4)$$

**Critério de parada:**

$$|K^{(n+1)} - K^{(n)}| \leq 10^{-9} \quad (7.5-5)$$

**Cálculo de  $F'(K)$  :**

Derivando as expressões de  $\bar{v}_{zi}$  em relação a  $K$ , tem-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$(1) \quad -25 \cdot \frac{d\bar{v}_{z1}}{dK} + 48 \cdot \frac{d\bar{v}_{z2}}{dK} - 36 \cdot \frac{d\bar{v}_{z3}}{dK} + 16 \cdot \frac{d\bar{v}_{z4}}{dK} - 3 \cdot \frac{d\bar{v}_{z5}}{dK} = 0$$

$$(2) \quad -3 \frac{d\bar{v}_{z1}}{dK} - 10 \frac{d\bar{v}_{z2}}{dK} + 18 \frac{d\bar{v}_{z3}}{dK} - 6 \frac{d\bar{v}_{z4}}{dK} + \frac{d\bar{v}_{z5}}{dK} = 12\Delta r \frac{r_2}{-2\sqrt{\mu_2^2 + 2 \cdot K \cdot r_2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2}}$$

**de (3) a (8):**

$$\frac{d\bar{v}_{z(i-2)}}{dK} - 8 \frac{d\bar{v}_{z(i-1)}}{dK} + 8 \frac{d\bar{v}_{z(i+1)}}{dK} - \frac{d\bar{v}_{z(i+2)}}{dK} = 12 \cdot \Delta r \cdot \frac{r_i}{-2 \cdot \sqrt{\mu_i^2 + 2 \cdot K \cdot r_i \cdot \rho_i \cdot f(r)_i}}$$

$$(9) \quad -\frac{d\bar{v}_{z6}}{dK} + 6 \frac{d\bar{v}_{z7}}{dK} - 18 \frac{d\bar{v}_{z8}}{dK} + 10 \frac{d\bar{v}_{z9}}{dK} + 3 \frac{d\bar{v}_{z10}}{dK} = 12\Delta r \frac{r_9}{-2\sqrt{\mu_9^2 + 2 \cdot K \cdot r_9 \cdot \rho_9 \cdot f(r)_9}}$$

$$(10) \quad \frac{d\bar{v}_{z10}}{dK} \text{ encontra-se derivando a Equação (7.3-16) em relação à } K :$$

$$\frac{d\bar{v}_{z_{10}}}{dK} \cong 12,85 \cdot \sqrt{\frac{R}{8 \cdot \rho \cdot K}} + \sqrt{\frac{R}{1,28 \cdot \rho \cdot K}} \cdot \left[ \text{Ln} \left( \frac{0,1 \cdot R}{26 \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{K \cdot R}}} \right) + 1 \right] \quad (7.5-6)$$

Onde :  $S = (R - r_{10}) = 0,1 \cdot R$  ; (para o caso de 11 pontos radiais)

Resolvendo o sistema linear acima por eliminação de Gauss, determinam-se todos os  $\frac{d\bar{v}_{z_i}}{dK}$ , e integrando numericamente por Simpson, pode-se encontrar o valor de  $F'(K)$  :

$$F'(K) = - \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho \cdot \frac{d\bar{v}_{z_i}}{dK} \cdot dr \quad (7.5-7)$$

## 7.6 CÁLCULO DO PERFIL DE TEMPERATURA

Discretização da Equação (7.2-7):

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_{r_i} = \frac{1}{\rho_i \cdot \hat{c}_{p_i} \cdot v_{z_i}} \cdot \left[ \left( \frac{(k_i + k_{t_i})}{r_i} + \left. \frac{\partial k_i}{\partial r_i} \right|_{r_i} + \left. \frac{\partial k_{t_i}}{\partial r_i} \right|_{r_i} \right) \cdot \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right|_{r_i} + (k_i + k_{t_i}) \cdot \left. \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} \right|_{r_i} \right] \quad (7.6-1)$$

- Para  $i = 1$  ( $r_1 = 0$ )

Da condição de contorno, no centro do tubo:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{discretizando:}$$

$$\frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot [-25 \cdot \bar{T}_1 + 48 \cdot \bar{T}_2 - 36 \cdot \bar{T}_3 + 16 \cdot \bar{T}_4 - 3 \cdot \bar{T}_5] = 0$$

isolando  $\bar{T}_1$ :

$$\bar{T}_1 = \frac{48 \cdot \bar{T}_2 - 36 \cdot \bar{T}_3 + 16 \cdot \bar{T}_4 - 3 \cdot \bar{T}_5}{25} \quad (7.6-2)$$

• **Para  $i = 11$  ( $r_{11} = R$ )**

Nesta situação tem-se que o calor de condução é igual ao calor por convecção:

$$k_{11} \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot [3 \cdot \bar{T}_7 - 16 \cdot \bar{T}_8 + 36 \cdot \bar{T}_9 - 48 \cdot \bar{T}_{10} + 25 \cdot \bar{T}_{11}] = h \cdot (T_w - \bar{T}_{11}) \quad (7.6-3)$$

onde:  $T_w$  = temperatura da parede do tubo

isolando  $\bar{T}_{11}$ :

$$\bar{T}_{11} = \left( -3 \cdot \bar{T}_7 + 16 \cdot \bar{T}_8 - 36 \cdot \bar{T}_9 + 48 \cdot \bar{T}_{10} + \frac{12 \cdot \Delta r \cdot h}{k_{11}} \cdot T_w \right) \cdot \left( \frac{k_{11}}{25 \cdot k_{11} + 12 \cdot \Delta r \cdot h} \right) \quad (7.6-4)$$

• **Para  $i = 2$  ( $r_2 = \Delta r$ )**

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_2}{dz} = & \frac{1}{\rho_2 \cdot \hat{c}_{p2} \cdot \bar{v}_{z2}} \left\{ \left[ \frac{(k_2 + k_{t2})}{r_2} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot k_1 - 10 \cdot k_2 + 18 \cdot k_3 - 6 \cdot k_4 + k_5) + \right. \right. \\ & \left. \frac{1}{12 \Delta r} (-3k_{t1} - 10k_{t2} + 18k_{t3} - 6k_{t4} + k_{t5}) \right] * \frac{1}{12 \Delta r} (-3 \cdot \bar{T}_1 - 10 \cdot \bar{T}_2 + 18 \cdot \bar{T}_3 - 6 \cdot \bar{T}_4 + \bar{T}_5) \\ & \left. + \frac{(k_2 + k_{t2})}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (11 \cdot \bar{T}_1 - 20 \cdot \bar{T}_2 + 6 \cdot \bar{T}_3 + 4 \cdot \bar{T}_4 - \bar{T}_5) \right\} \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned} k_{t2} = & -\rho_2 \cdot \hat{c}_{p2} \cdot f(r)_2 \cdot \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \Big|_{r=2} \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \Big|_{r_2} = & \frac{\sqrt{\mu_2^2 + 2 \cdot K \cdot r_2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2} - \mu_2}{-2 \cdot \rho_2 \cdot f(r)_2} \\ f(r) = & R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]^2 \end{aligned}$$



- Para  $i = 10$  ( $r_{10} = 9 \cdot \Delta r$ )

$$\frac{d\bar{T}_{10}}{dz} = \frac{1}{\rho_{10} \cdot \hat{c}_{p10} \cdot \bar{v}_{z10}} \cdot \left\{ \left[ \frac{(k_{10} + k_{t10})}{r_i} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-k_7 + 6 \cdot k_8 - 18 \cdot k_9 + 10 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{11}) + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{12 \Delta r} (-k_{t7} + 6 \cdot k_{t8} - 18 \cdot k_{t9} + 10 \cdot k_{t10} + 3 \cdot k_{t11}) \right] * \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-\bar{T}_7 + 6 \cdot \bar{T}_8 - 18 \cdot \bar{T}_9 + 10 \cdot \bar{T}_{10} + 3 \cdot \bar{T}_{11}) \\ \left. + \frac{(k_{10} + k_{t10})}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-\bar{T}_7 + 4 \cdot \bar{T}_8 + 6 \cdot \bar{T}_9 - 20 \cdot \bar{T}_{10} + 11 \cdot \bar{T}_{11}) \right\}$$

Onde:

$$k_{t10} = -\rho_{10} \cdot \hat{c}_{p10} \cdot f(r)_{10} \cdot \left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r10}$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r10} = \frac{\sqrt{\mu_{10}^2 + 2 \cdot K \cdot r_{10} \cdot \rho_{10} \cdot f(r)_{10}} - \mu_{10}}{-2 \cdot \rho_{10} \cdot f(r)_{10}}$$

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r_{10}}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r_{10}}{R} \right)^4 \right]^2$$

- Para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ( $r_i = (i-1) \cdot \Delta r$ )

$$\frac{d\bar{T}_i}{dz} = \frac{1}{\rho_{i0} \cdot \hat{c}_{pi} \cdot \bar{v}_{zi}} \cdot \left\{ \left[ \frac{(k_i + k_{ti})}{r_i} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (k_{(i-2)} - 8 \cdot k_{(i-1)} + 8 \cdot k_{(i+1)} - k_{(i+2)}) + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{12 \Delta r} (k_{t(i-2)} - 8 \cdot k_{t(i-1)} + 8 \cdot k_{t(i+1)} - k_{t(i+2)}) \right] * \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (\bar{T}_{(i-2)} - 8 \cdot \bar{T}_{(i-1)} + 8 \cdot \bar{T}_{(i+1)} - \bar{T}_{(i+2)}) \\ \left. + \frac{(k_i + k_{ti})}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-\bar{T}_{(i-2)} + 16 \cdot \bar{T}_{(i-1)} - 30 \cdot \bar{T}_i + 16 \cdot \bar{T}_{(i+1)} - \bar{T}_{(i+2)}) \right\}$$

Onde:

$$k_{ti} = -\rho_i \cdot \hat{c}_{pi} \cdot f(r)_i \cdot \left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{ri}$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{ri} = \frac{\sqrt{\mu_i^2 + 2 \cdot K \cdot r_i \cdot \rho_i \cdot f(r)_i} - \mu_i}{-2 \cdot \rho_i \cdot f(r)_i}$$

$$f(r) = R^2 \cdot \left[ 0,14 - 0,08 \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 - 0,06 \left( \frac{r_i}{R} \right)^4 \right]^2$$

A discretização da Equação (7.6-1), gerou nove equações diferenciais ordinárias e duas equações algébricas, as equações algébricas provêm da discretização no centro e na parede do tubo, isolando  $\bar{T}_1$  e  $\bar{T}_{11}$  o sistema de equações fica:

**Sistema de equações para o cálculo da temperatura .**

- $$\bar{T}_1 = \frac{48 \cdot \bar{T}_2 - 36 \cdot \bar{T}_3 + 16 \cdot \bar{T}_4 - 3 \cdot \bar{T}_5}{25}$$
- $$\bar{T}_{11} = \left( -3 \cdot \bar{T}_7 + 16 \cdot \bar{T}_8 - 36 \cdot \bar{T}_9 + 48 \cdot \bar{T}_{10} + \frac{12 \cdot \Delta r \cdot h}{k_{11}} \cdot T_w \right) \cdot \left( \frac{k_{11}}{25 \cdot k_{11} + 12 \cdot \Delta r \cdot h} \right)$$
- $$\frac{d\bar{T}_2}{dz} = \frac{1}{\rho_2 \cdot \hat{c}_{p2} \cdot \bar{v}_{z2}} \left\{ \left[ \frac{(k_2 + k_{t2})}{r_2} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-3 \cdot k_1 - 10 \cdot k_2 + 18 \cdot k_3 - 6 \cdot k_4 + k_5) + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{12 \Delta r} (-3 \cdot k_{t1} - 10 \cdot k_{t2} + 18 \cdot k_{t3} - 6 \cdot k_{t4} + k_{t5}) \right] * \frac{1}{12 \Delta r} (-3 \cdot \bar{T}_1 - 10 \cdot \bar{T}_2 + 18 \cdot \bar{T}_3 - 6 \cdot \bar{T}_4 + \bar{T}_5) \\ \left. + \frac{(k_2 + k_{t2})}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (11 \cdot \bar{T}_1 - 20 \cdot \bar{T}_2 + 6 \cdot \bar{T}_3 + 4 \cdot \bar{T}_4 - \bar{T}_5) \right\}$$

para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

- $$\frac{d\bar{T}_i}{dz} = \frac{1}{\rho_{i0} \cdot \hat{c}_{pi} \cdot \bar{v}_{zi}} \cdot \left\{ \left[ \frac{(k_i + k_{ti})}{r_i} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (k_{(i-2)} - 8 \cdot k_{(i-1)} + 8 \cdot k_{(i+1)} - k_{(i+2)}) \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{12 \Delta r} (k_{t(i-2)} - 8 \cdot k_{t(i-1)} + 8 \cdot k_{t(i+1)} - k_{t(i+2)}) \right] * \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (\bar{T}_{(i-2)} - 8 \cdot \bar{T}_{(i-1)} + 8 \cdot \bar{T}_{(i+1)} - \bar{T}_{(i+2)}) \\ \left. + \frac{(k_i + k_{ti})}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-\bar{T}_{(i-2)} + 16 \cdot \bar{T}_{(i-1)} - 30 \cdot \bar{T}_i + 16 \cdot \bar{T}_{(i+1)} - \bar{T}_{(i+2)}) \right\}$$
- $$\frac{d\bar{T}_{10}}{dz} = \frac{1}{\rho_{10} \cdot \hat{c}_{p10} \cdot \bar{v}_{z10}} \cdot \left\{ \left[ \frac{(k_{10} + k_{t10})}{r_{10}} + \frac{1}{12 \cdot \Delta r} \cdot (-k_7 + 6 \cdot k_8 - 18 \cdot k_9 + 10 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{11}) + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{12 \Delta r} (-k_{t7} + 6 \cdot k_{t8} - 18 \cdot k_{t9} + 10 \cdot k_{t10} + 3 \cdot k_{t11}) \right] * \frac{1}{12 \Delta r} (-\bar{T}_7 + 6 \cdot \bar{T}_8 - 18 \cdot \bar{T}_9 + 10 \cdot \bar{T}_{10} + 3 \cdot \bar{T}_{11}) \\ \left. + \frac{(k_{10} + k_{t10})}{12 \cdot \Delta r^2} \cdot (-\bar{T}_7 + 4 \cdot \bar{T}_8 + 6 \cdot \bar{T}_9 - 20 \cdot \bar{T}_{10} + 11 \cdot \bar{T}_{11}) \right\}$$

Por ser dado do problema, é conhecido o perfil de temperatura (de  $\bar{T}_1$  a  $\bar{T}_{11}$ ) no início do tubo em  $z = 0$  ou  $n = 1$ . A seguir determina-se o sistema das 9 equações diferenciais ordinárias por Runge – Kutta Fehlberg, encontrando assim no seguinte ponto axial ( $n = 2$ ) as temperaturas de  $\bar{T}_2$  a  $\bar{T}_{10}$ , nesse mesmo ponto axial pode-se determinar  $\bar{T}_1$  e  $\bar{T}_{11}$  das equações algébricas.

Sendo conhecido o perfil de temperatura (de  $\bar{T}_1$  a  $\bar{T}_{11}$ ) no ponto axial ( $n = 2$ ), determina-se no seguinte ponto axial ( $n = 3$ ) as temperaturas de  $\bar{T}_2$  a  $\bar{T}_{10}$  por Runge – Kutta do sistema de 9 equações diferenciais ordinárias, para esse mesmo ponto axial ( $n = 3$ ) determina-se  $\bar{T}_1$  e  $\bar{T}_{11}$  das equações algébricas. Desta maneira vão se encontrando o perfil de temperaturas para cada ponto axial, até o ponto  $n = N+1$ , ou comprimento do tubo  $L$ .

## 7.7 CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE RADIAL ' $\bar{v}_r$ '

Discretização da Equação (7.2-11):

$$\rho_i \cdot \bar{v}_{r_i} + r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot \bar{v}_r)}{\partial r} \Big|_{r_i} = -r_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot \bar{v}_z)}{\partial z} \Big|_{r_i} \quad (7.7-1)$$

Para uma variável  $X_{(n,i)}$ , tem-se que:

$n$  : indica a posição axial (em  $z$ ), pontos da malha de  $z = 0$  a  $z = L$        $n = 1, 2, \dots, N+1$

$i$  : indica a posição radial (em  $r$ ), pontos da malha de  $r = 0$  a  $r = R$        $i = 1, 2, \dots, 11$

- Para  $i = 1$  ( $r_1 = 0$ )

Substituindo  $r_1 = 0$  na equação :

$$\rho_1 \cdot \bar{v}_{r_1} + r_1 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot \bar{v}_r)}{\partial r} = -r_1 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot \bar{v}_z)}{\partial z}$$

$$\rho_1 \cdot \bar{v}_{r_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_{r_1} = 0$$

- Para  $i = 2$  ( $r_2 = \Delta r$ )

$$\rho_2 \cdot \bar{v}_{r2} + \frac{r_2}{12 \cdot \Delta r} (-3\rho_{(n,1)} \cdot \bar{v}_{r1} - 10\rho_{(n,2)} \cdot \bar{v}_{r2} + 18\rho_{(n,3)} \cdot \bar{v}_{r3} - 6\rho_{(n,4)} \cdot \bar{v}_{r4} + \rho_{(n,5)} \bar{v}_{r5}) =$$

$$\dots - r_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) \Big|_{z_n}^{r_2}$$

- Para  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ( $r_i = (i - 1) \cdot \Delta r$ )

$$\rho_{(n,i)} \cdot \bar{v}_{ri} + \frac{r_i}{12 \cdot \Delta r} (\rho_{(n,i-2)} \bar{v}_{r(i-2)} - 8 \cdot \rho_{(n,i-1)} \bar{v}_{r(i-1)} + 8 \cdot \rho_{(n,i+1)} \bar{v}_{r(i+1)} - \rho_{(n,i+2)} \bar{v}_{r(i+2)}) =$$

$$\dots - r_i \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) \Big|_{z_n}^{r_i}$$

- Para  $i = 10$  ( $r_{10} = 9 \cdot \Delta r$ )

$$\rho_{10} \cdot \bar{v}_{r10} + \frac{r_{10}}{12 \cdot \Delta r} (-\rho_{(n,7)} \bar{v}_{r7} + 6\rho_{(n,8)} \bar{v}_{r8} - 18\rho_{(n,9)} \bar{v}_{r9} + 10\rho_{(n,10)} \bar{v}_{r10} + 3\rho_{(n,11)} \bar{v}_{r11}) =$$

$$\dots - r_{10} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) \Big|_{z_n}^{r_{10}}$$

- Para  $i = 11$  ( $r = R$ )

Da condição de contorno na parede:

$$\bar{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_{r11} = 0$$

Agora, o lado direito da Equação (7.7-1):

$$-r_i \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot \bar{v}_z) \Big|_{z_n}^{r_i} =$$

• **Para  $n = 1$  ( $z = 0$ )**

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ -25 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot \bar{v}_{z(n,i)} + 48 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+1,i)} \right. \\ \left. - 36 \cdot \rho_{(n+2,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+2,i)} + 16 \cdot \rho_{(n+3,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+3,i)} - 3 \cdot \rho_{(n+4,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+4,i)} \right]$$

• **Para  $n = 2$**

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ -3 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-1,i)} - 10 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot \bar{v}_{z(n,i)} \right. \\ \left. + 18 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+1,i)} - 6 \cdot \rho_{(n+2,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+2,i)} + \rho_{(n+3,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+3,i)} \right]$$

• **Para  $n = N$**

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ -\rho_{(n-3,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-3,i)} + 6 \cdot \rho_{(n-2,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-2,i)} \right. \\ \left. - 18 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-1,i)} + 10 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot \bar{v}_{z(n,i)} + 3 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+1,i)} \right]$$

• **Para  $n = N+1$**

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ 3 \cdot \rho_{(n-4,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-4,i)} - 16 \cdot \rho_{(n-3,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-3,i)} \right. \\ \left. + 36 \cdot \rho_{(n-2,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-2,i)} - 48 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-1,i)} + 25 \cdot \rho_{(n,i)} \cdot \bar{v}_{z(n,i)} \right]$$

• **Para  $(N - 1) \Rightarrow n \geq 3$  (para o resto dos pontos no meio da malha)**

$$= -r_i \cdot \frac{1}{12 \cdot \Delta z} \cdot \left[ \rho_{(n-2,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-2,i)} - 8 \cdot \rho_{(n-1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n-1,i)} \right. \\ \left. + 8 \cdot \rho_{(n+1,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+1,i)} - \rho_{(n+2,i)} \cdot \bar{v}_{z(n+2,i)} \right]$$

Nota-se na discretização da Equação (7.7-1), que o lado direito da equação está em função do raio e do comprimento do tubo, para facilitar. Para exemplificar, apresenta-se a seguir o sistema de equações geradas da discretização do lado direito da Equação (7.7-1), para o valor de  $n = 2$ .

**As equações geradas são : (exemplo para  $n = 2$ )**

$$(1) \quad \bar{v}_{r1} = 0$$

$$(2) \quad -3\rho_{(n,1)} \cdot \bar{v}_{r1} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_2} - 10 \right) \rho_{(n,2)} \cdot \bar{v}_{r2} + 18\rho_{(n,3)} \cdot \bar{v}_{r3} - 6\rho_{(n,4)} \cdot \bar{v}_{r4} + \rho_{(n,5)} \cdot \bar{v}_{r5} =$$

$$- \frac{\Delta r}{\Delta z} \left[ -3 \cdot \rho_{(1,2)} \cdot \bar{v}_{z(1,2)} - 10 \cdot \rho_{(2,2)} \cdot \bar{v}_{z(2,2)} + 18 \cdot \rho_{(3,2)} \cdot \bar{v}_{z(3,2)} - 6 \cdot \rho_{(4,2)} \cdot \bar{v}_{z(4,2)} + \rho_{(5,2)} \cdot \bar{v}_{z(5,2)} \right]$$

**Equações (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ( $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ )**

$$\rho_{(2,i-2)} \cdot \bar{v}_{r(i-2)} - 8 \cdot \rho_{(2,i-1)} \cdot \bar{v}_{r(i-1)} + \left( \frac{12 \cdot \Delta r}{r_i} \right) \cdot \rho_{(2,i)} \cdot \bar{v}_{r(i)} + 8 \cdot \rho_{(2,i+1)} \cdot \bar{v}_{r(i+1)} - \rho_{(2,i+2)} \cdot \bar{v}_{r(i+2)} =$$

$$- \frac{\Delta r}{\Delta z} \left[ -3 \cdot \rho_{(1,i)} \cdot \bar{v}_{z(1,i)} - 10 \cdot \rho_{(2,i)} \cdot \bar{v}_{z(2,i)} + 18 \cdot \rho_{(3,i)} \cdot \bar{v}_{z(3,i)} - 6 \cdot \rho_{(4,i)} \cdot \bar{v}_{z(4,i)} + \rho_{(5,i)} \cdot \bar{v}_{z(5,i)} \right]$$

**(10)**

$$- \rho_{(2,7)} \cdot \bar{v}_{r7} + 6 \cdot \rho_{(2,8)} \cdot \bar{v}_{r8} - 18\rho_{(2,9)} \cdot \bar{v}_{r9} + \left( \frac{12\Delta r}{r_{10}} + 10 \right) \cdot \rho_{(2,10)} \cdot \bar{v}_{r10} + 3 \cdot \rho_{(2,11)} \cdot \bar{v}_{r11} = - \frac{\Delta r}{\Delta z} *$$

$$\left[ -3 \cdot \rho_{(1,10)} \cdot \bar{v}_{z(1,10)} - 10 \cdot \rho_{(2,10)} \cdot \bar{v}_{z(2,10)} + 18 \cdot \rho_{(3,10)} \cdot \bar{v}_{z(3,10)} - 6 \cdot \rho_{(4,10)} \cdot \bar{v}_{z(4,10)} + \rho_{(5,10)} \cdot \bar{v}_{z(5,10)} \right]$$

$$(11) \quad 1 \cdot \bar{v}_{r11} = 0$$

O sistema de equações lineares obtido acima é determinado pelo método de eliminação de Gauss.

## 7.8 CÁLCULO DA QUEDA DE PRESSÃO

Toda vez que se determina o perfil de velocidade axial ( $\bar{v}_z$ ), determina-se também o valor de 'K' (que foi inicialmente suposto) através de um cálculo iterativo usando o método de Newton Rapson. O cálculo de ( $K = -d\bar{P}/dz$ ) corresponde ao diferencial da pressão na seção transversal, visto que  $\bar{P} = \bar{P}(z)$ .

O cálculo da pressão é então obtido por se integrar numericamente os valores obtidos para os diferenciais da pressão ao longo do tubo.

Integrando-se o gradiente de pressão em z, desde 0 até L, através do método de Simpson tem-se que :

$$\Delta\bar{P} = \int_0^L K \, dz \cong \frac{\Delta z}{3} \cdot [K_1 + 4 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + 4 \cdot K_4 + \dots + 4 \cdot K_{n-1} + K_n] \quad (7.8-1)$$

$$\text{Onde:} \quad K = -\left(\frac{d\bar{P}}{dz}\right)$$

# Capítulo 8

## 8. RESULTADOS

### 8.1 ESTUDO DA TEMPERATURA

Para o estudo do efeito da temperatura, velocidade e queda de pressão, simulou-se a água como fluido sendo aquecido, com as propriedades físicas variando na faixa de 30 a 100 °C. No apêndice A, mostra-se a dependência das propriedades físicas com a temperatura. A temperatura de entrada ao tubo 'Te' é de 303,15 K (30 °C) para todos os casos deste capítulo.

#### 8.1.1 Perfis de temperatura

Apresentam-se os perfis de temperatura para diferentes números de Reynolds considerando-se duas situações:

- 1º mantendo-se fixo o comprimento total de tubo (L), para todos os casos
- 2º mantendo-se fixo o tempo de residência ( $\theta$ ), para todos os casos

#### Comprimento constante ( L fixo )

Nos gráficos apresentados nesta seção, empregaram-se os seguintes dados:

comprimento do tubo :  $L = 51 \text{ m}$

temperatura da parede :  $T_w = 363,15 \text{ K (90 °C)}$

Observa-se na Figura 8.1 o perfil de temperatura para o escoamento laminar com o número de  $Re = 1800$ . Neste caso a região mais próxima da parede ( $r = R$ ) aproxima-se aos poucos à temperatura da parede, chegando como máximo a 333 K (aprox.) no final do tubo. Em contra partida o centro do tubo, que é a região que mais demora para se aquecer, começa a esquentar somente a partir dos 20 metros. Na Figura 8.2 tem-se o perfil para um número de Reynolds  $Re = 13000$ . Nota-se que para o escoamento turbulento a transferência de calor melhorou. A região próxima à parede tem uma elevação rápida da temperatura nos primeiros 6 metros de escoamento, aproximando-se à temperatura da parede no final do



tubo, no centro do tubo começa esquentar aos 7 metros de escoamento e chega a 345 K no final do tubo. Estes resultados eram esperados, visto que a transmissão de calor é mais efetiva no regime turbulento, ainda mais levando-se em consideração que o tempo de residência para o caso turbulento foi inferior do que no escoamento laminar.

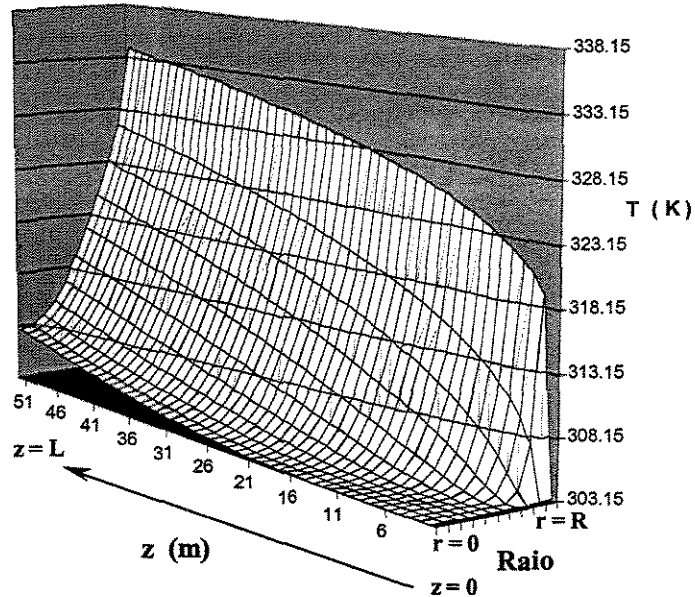


Figura 8.1 Perfil laminar de temperatura para  $Re = 1\,800$ .

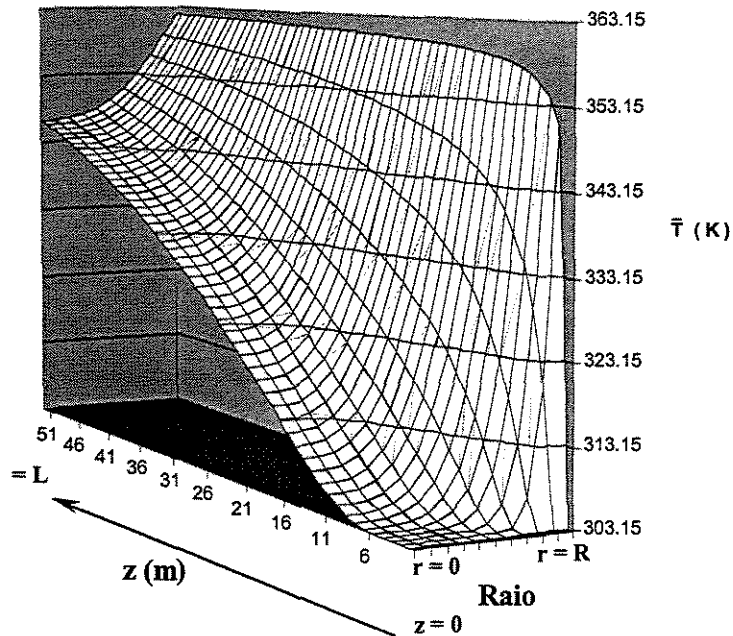


Figura 8.2 Perfil turbulento de temperatura para  $Re = 13\,000$ .

A Figura 8.3 apresenta o perfil de temperatura para um número de Reynolds de 20000, maior do que o caso anterior. Aparentemente dá a falsa impressão que a transferência de calor é desfavorecida, visto que a região próxima à parede chega a 358 K (aprox.) em  $z = L$ , e no centro do tubo chega a 330 K (aprox.).

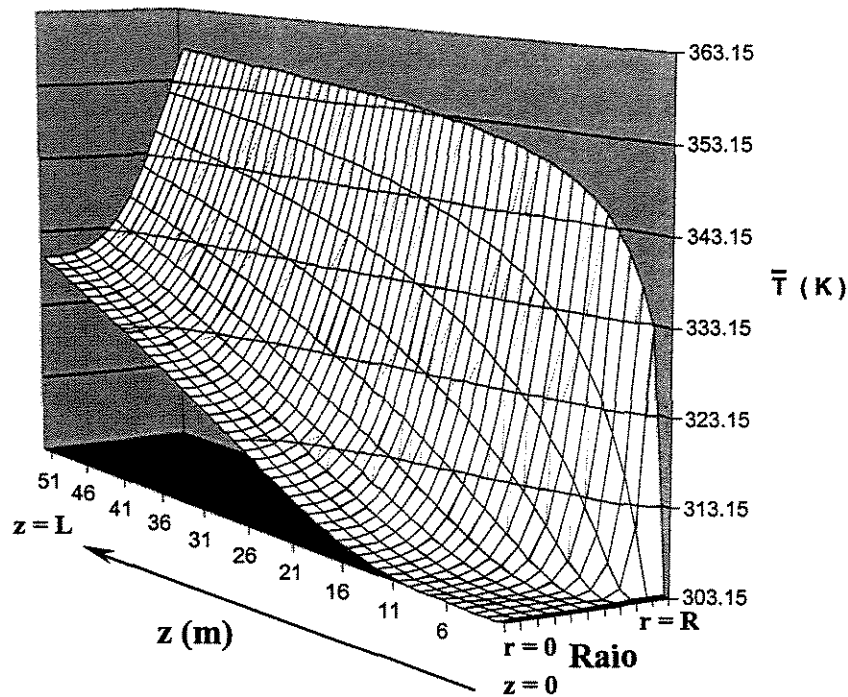


Figura 8.3 Perfil turbulento de temperatura para  $Re = 20\,000$ .

Isto acontece porque à medida que aumenta o número de Reynolds, aumenta a velocidade do fluido e diminui o tempo de residência. Portanto para esse comprimento de tubo, o fluido passa rapidamente sem ter o tempo suficiente para que a transferência de calor aconteça. Este fato é evidenciado mais uma vez na Figura 8.4 com número de Reynolds de 50000, consideravelmente maior do que os casos anteriores. Para esta situação o centro do tubo só começa a esquentar a partir dos 21 metros aproximadamente e chega a 311 K em  $z = L$ , situação parecida com o caso do escoamento laminar para  $Re = 1800$ , sendo que a diferença entre o caso laminar e este altamente turbulento, está na região próxima à parede. Para o escoamento turbulento, na região próxima à parede atinge-se a temperatura de 361 K nos primeiros 6 metros de escoamento e mantém-se praticamente constante até  $z = L$  devido ao elevado gradiente de temperatura nesta região.

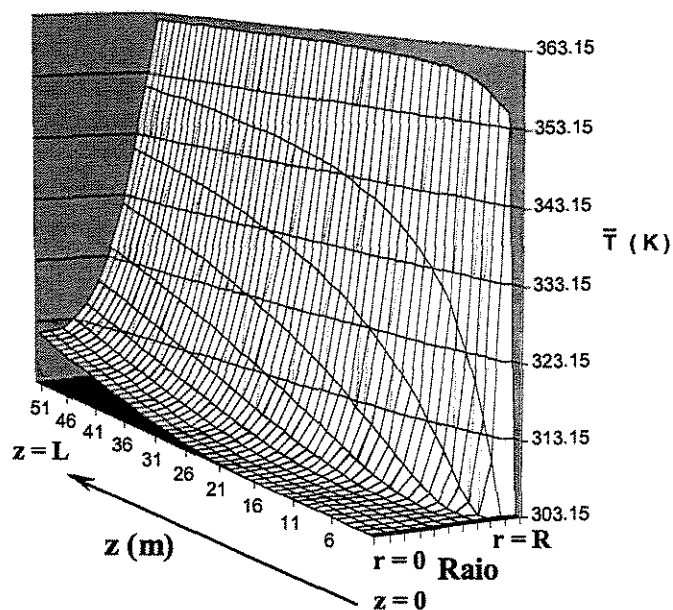


Figura 8.4 Perfil turbulento de temperatura para  $Re = 50\,000$ .

Para considerar a troca de calor em um determinado regime (laminar ou turbulento), a eficiência da troca de calor é melhor analisada por se comparar escoamentos com o mesmo tempo de residência, conforme mostrado na próxima seção.

#### Tempo de residência constante ( $\theta$ fixo)

Nesta seção apresentam-se os perfis de temperatura com dois exemplos, para escoamento laminar e turbulento com o mesmo tempo de residência ( $\theta$ ).

Define-se o tempo de residência como :

$$\theta = \frac{\text{volume}}{\text{vazão}} \quad (8.1.1-1)$$

A expressão para o comprimento do tubo 'L' em função do tempo de residência, é dada por:

$$L = \frac{\theta \cdot Re \cdot \mu}{\rho \cdot D} \quad (8.1.1-2)$$

Onde :

$\theta$  : tempo de residência

$Re$  : número adimensional de Reynolds

$\mu$ : viscosidade do fluido na temperatura de referência

$\rho$ : densidade do fluido na temperatura de referência

$D$ : diâmetro do tubo na temperatura de referência

Os parâmetros empregados foram os seguintes :

Tempo de residência :  $\theta = 2100$  ( s )

comprimento do tubo : calculado da Equação (8.1.1-2)

temperatura da parede :  $T_w = 363,15$  K (90 °C)

perfil de temperatura na entrada do tubo :  $T_e = 303.15$  K (30 °C)

temp. de referência para o cálculo de ' $Re$ ':  $T_{ref} = (T_e + T_w) / 2 = 60$  °C

Para o tempo de residência de 2100 segundos, e um número de Reynolds de 2000 (laminar) o comprimento do tubo é de 10,13 metros. A Figura 8.5 mostra o aquecimento para este número de Reynolds, pode ser comparado com a Figura 8.6 que mostra o mesmo fenômeno para um número de Reynolds de 12000. Neste caso o comprimento é de 60,8 m.

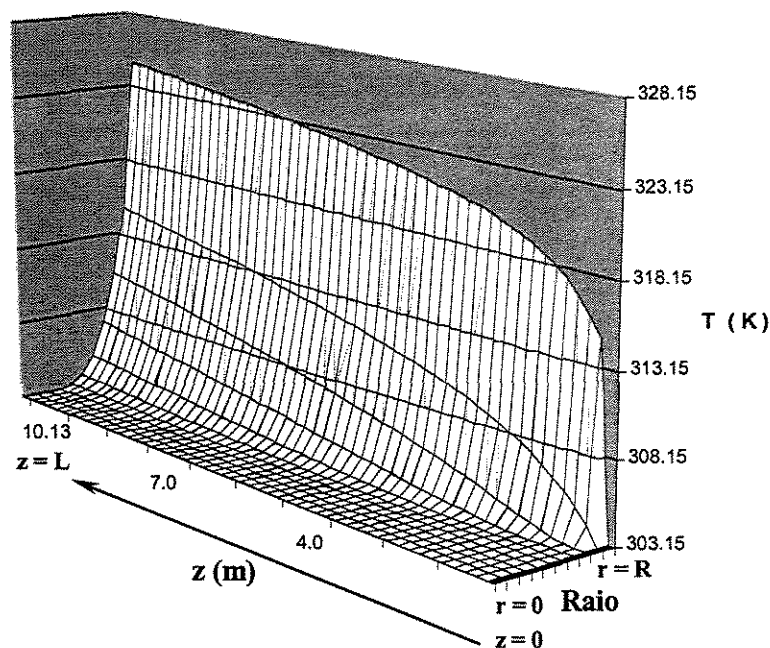


Figura 8.5 Perfil laminar de temperatura para  $Re = 2\,000$ .

Pelo comportamento observado mantendo-se o “tempo de residência constante” em 2100 segundos, conclui-se que há melhor transferência de calor com escoamento turbulento, o que já era esperado.

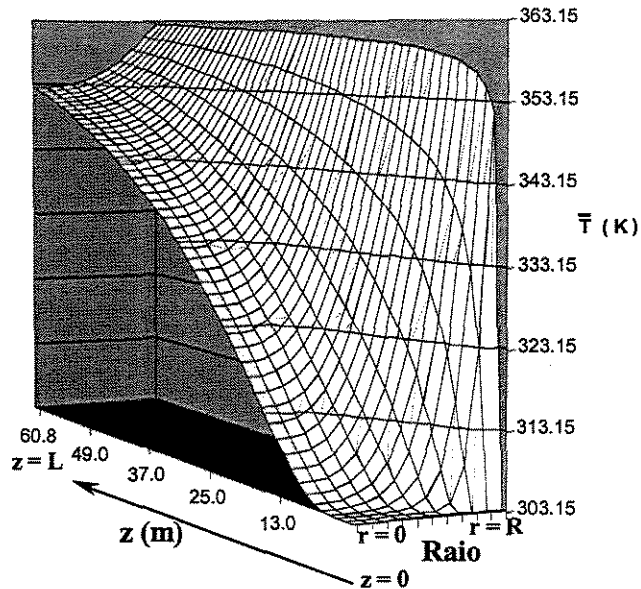


Figura 8.6 Perfil turbulento de temperatura para  $Re = 12\,000$ .

### 8.1.2 Variação da temperatura média de seção

A temperatura média de seção é a média aritmética das temperaturas em uma determinada seção transversal, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r) \cdot r \cdot dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot dr \, d\theta} \quad (8.1.2 - 1)$$

Foram calculados e plotados os valores das temperaturas médias na saída ou final de tubo ( $z = L$ ) para os números de Reynolds de: 2000; 4000; 6000; 8000; 10000; 12000; 14000; 16000; 18000 e 20000, apresentando os seguintes resultados.

#### Variação da $\langle T \rangle$ mantendo-se o comprimento do tubo fixo

Fixando  $L = 30$  m e com temperatura de parede igual a 363.15 K (90°C):

A temperatura média de seção na saída do tubo em função do número de Reynolds é apresentada na Figura 8.7. Observa-se um máximo para  $Re = 4000$  (escoamento turbulento) e posteriormente o valor da temperatura média vai diminuindo conforme aumenta o número de Reynolds.

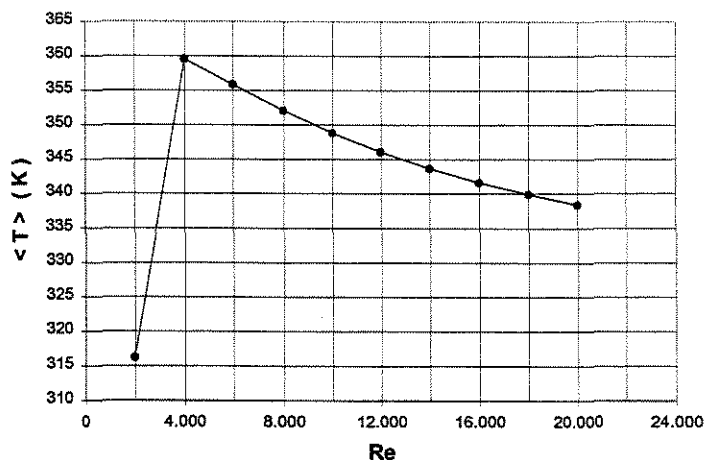


Figura 8.7 Temperatura média de seção em ( $z=L$ ) em função do  $Re$ , para  $L = 30$  m.

O tempo de residência para um tubo com comprimento fixo é inversamente proporcional ao número de Reynolds ( $Re$ ), pois conforme aumenta o  $Re$  diminui o tempo de residência. A Figura 8.8 mostra as temperaturas médias de seção em ( $z = L$ ) em função do tempo de residência, com as temperaturas médias calculadas para os mesmos números de Reynolds do gráfico anterior com comprimento de tubo fixo. Observa-se que, neste caso o ponto com maior tempo de residência corresponde ao  $Re=2000$ , o menor tempo de residência corresponde ao  $Re=20000$  e a temperatura média máxima corresponde a um tempo de residência de 3110 segundos.

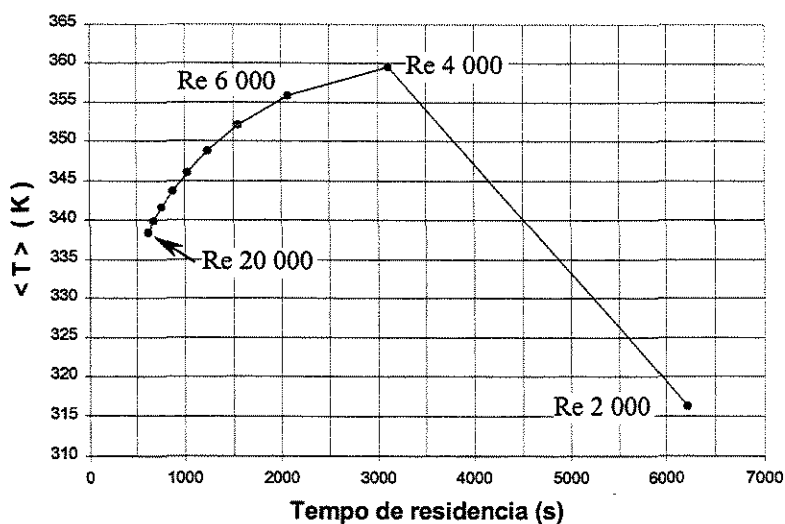


Figura 8.8 Temperatura média de seção em ( $z=L$ ) em função de ' $\theta$ ', para  $L = 30$  m.

**Variação da  $\langle T \rangle$  mantendo-se o tempo de residência fixo**

Fixando  $\theta = 2100$  s e com temperatura de parede igual a 363.15 K (90°C):

A Figura 8.9 apresenta a temperatura média de seção na saída ( $z = L$ ), em função do número de Reynolds. Neste caso, o tempo de residência é fixado. Observa-se claramente maiores temperaturas no escoamento turbulento. Ocorre uma variação acentuada entre  $Re = 2000$  e  $Re = 3000$ . Posteriormente para  $Re > 3000$ , tem-se incrementos pequenos de temperatura.

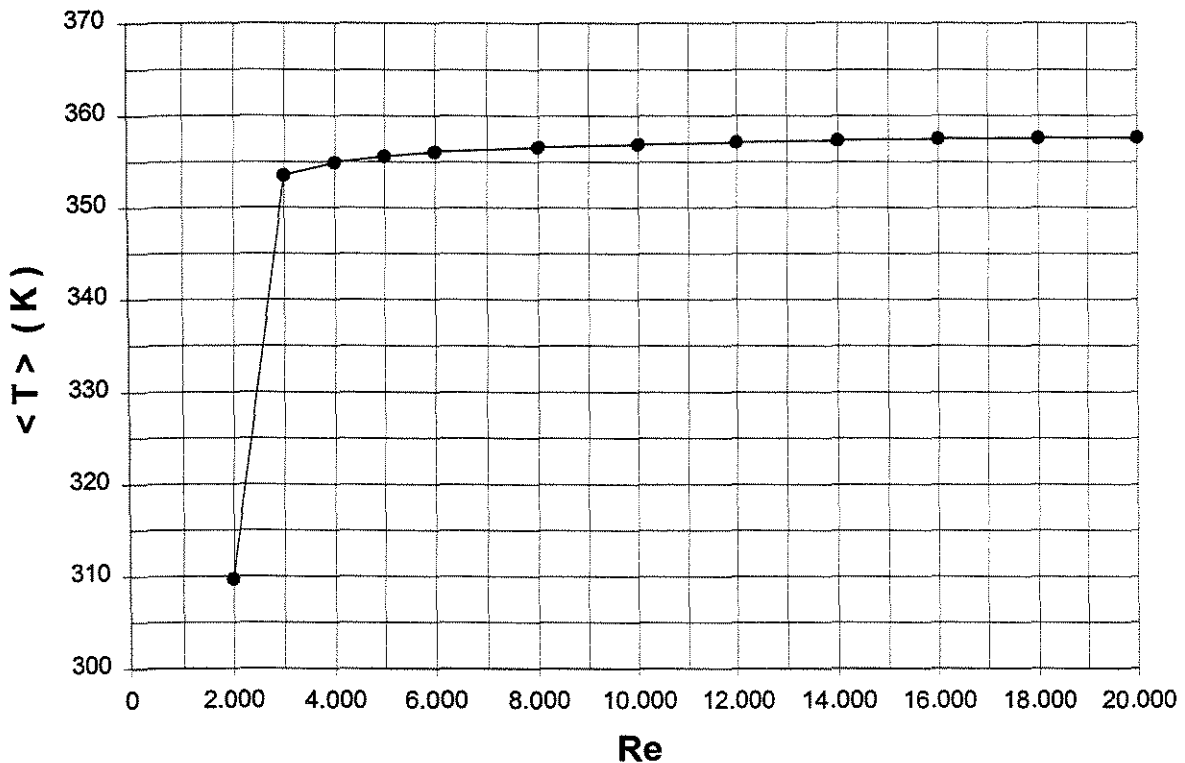


Figura 8.9 Temperatura média de seção em ( $z=L$ ), em função do  $Re$ , para ' $\theta$ ' = 2100 s.

A Figura 8.10 mostra a variação da temperatura média de seção na saída do tubo em função do comprimento de tubo, para os mesmos números de Reynolds. As diferenças significativas de variação da temperatura encontram-se com tubos entre 10 e 20 metros de comprimento. Após 20 metros, tubos com comprimentos maiores somente conseguem pequenos incrementos de temperatura.

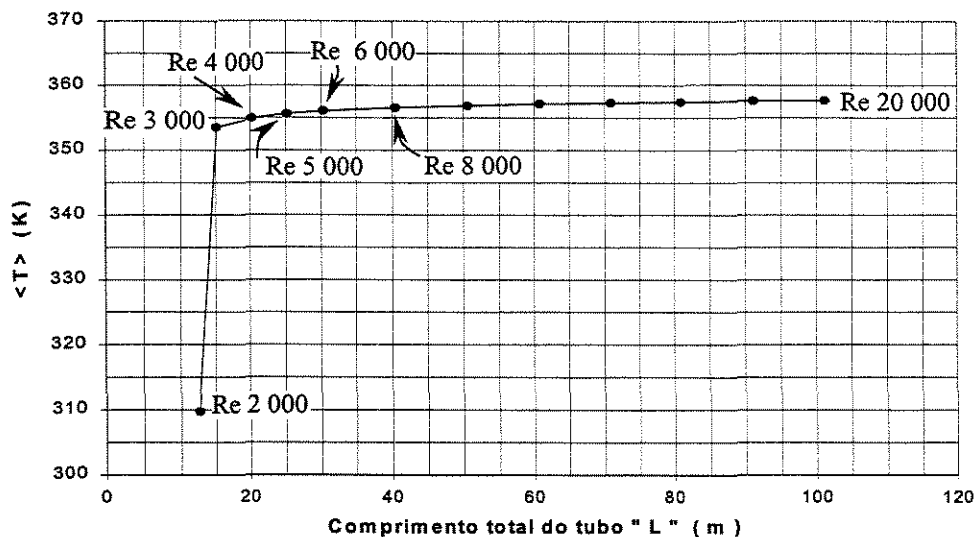


Figura 8.10 Temperatura média de seção em ( $z=L$ ), em função de ' $L$ ', para ' $\theta$ ' = 2100 s.

### 8.1.3 Influência da temperatura de parede

A influência da temperatura de parede ' $T_w$ ' é facilmente previsível, pois para maiores temperaturas de parede consegue-se aquecer o fluido a temperaturas maiores. A Figura 8.11 mostra duas curvas com o mesmo número de Reynolds ( $Re\,2000$ ), mas com as temperaturas de parede diferentes. Observa-se que a curva com temperatura de parede maior atinge temperaturas maiores. O mesmo comportamento acontece para o escoamento turbulento, conforme mostrado na Figura 8.12.

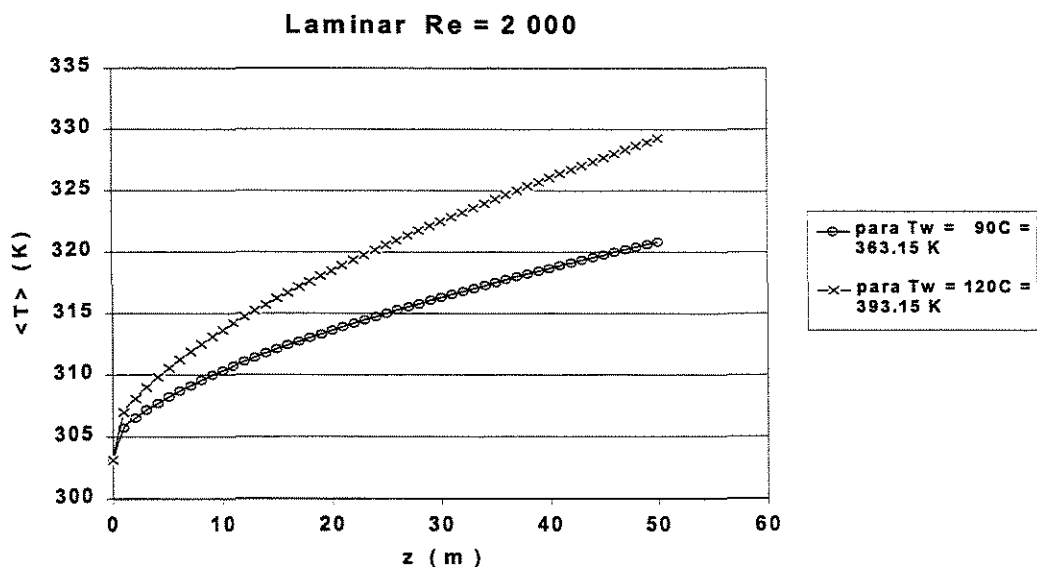


Figura 8.11 Influência da  $T_w$  na temperatura média de seção em função do comprimento de tubo, com escoamento laminar.



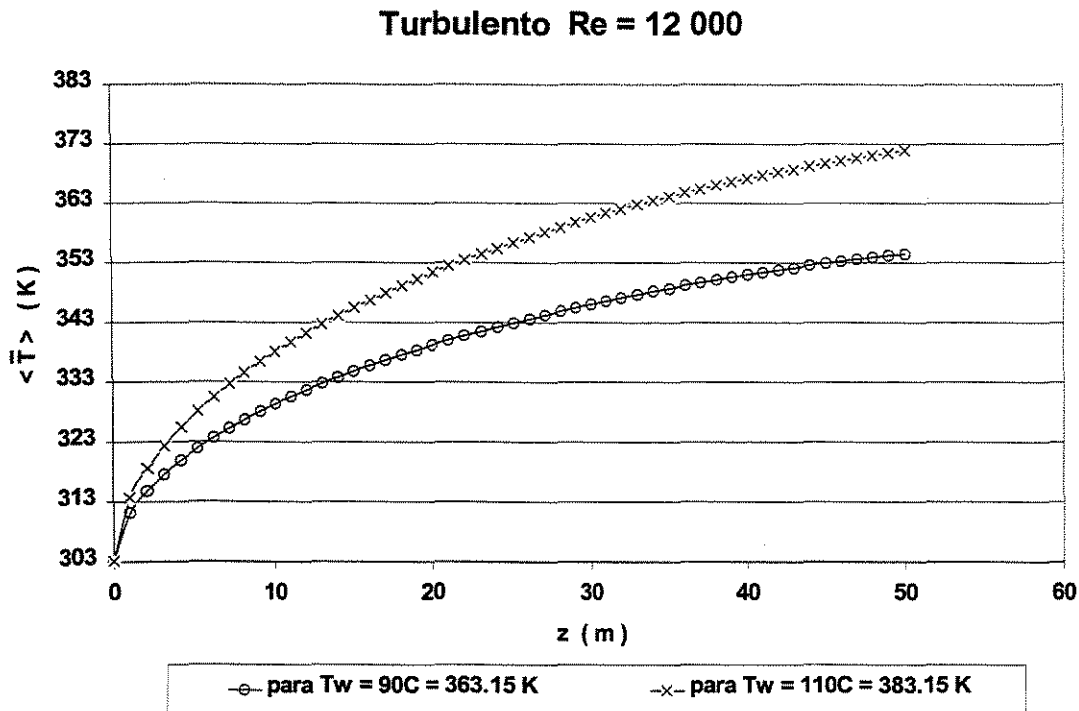


Figura 8.12 Influência da  $T_w$  na temperatura média de seção em função do comprimento de tubo, com escoamento turbulento.

#### 8.1.4 Variação da temperatura com o raio

##### Comprimento constante ( $L$ fixo )

Para este estudo o comprimento total foi fixado em 50 metros e a temperatura de parede em 363,15 K (90 °C). A Figura 8.13 (escoamento laminar) e Figura 8.14 ( escoamento turbulento), mostram a variação da temperatura em função do raio. Conforme esperado os perfis de temperatura apresentam temperaturas maiores para o escoamento turbulento. Na Figura 8.13, a temperatura final no centro do tubo para  $L = 50\text{ m}$  é 309 K e na região próxima da parede é de 353 K. Para se atingir uma temperatura uniforme e igual à temperatura da parede, seriam necessários 2030 metros de comprimento de tubo. Já para o escoamento turbulento a temperatura no centro do tubo ( $L = 50\text{m}$ ) é de 348 K, enquanto que na região próxima da parede é de 362 K. Neste caso seriam necessários 281 metros de tubo para se atingir uma temperatura uniforme e igual à temperatura da parede.

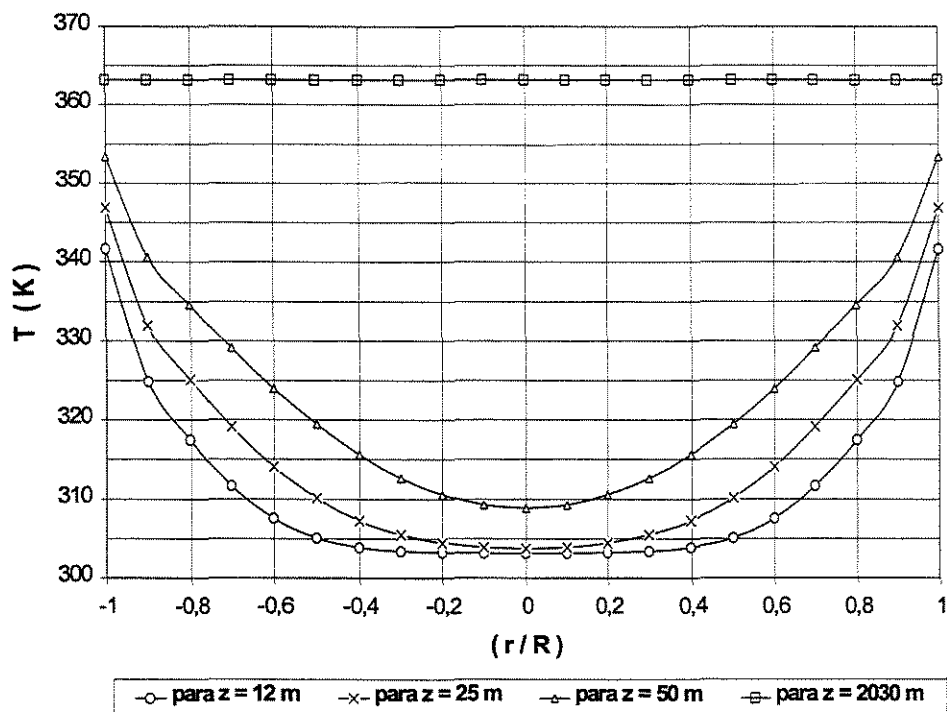


Figura 8.13 Temperatura em função do raio, para  $L = 50$  m. e  $Re = 2\,000$ .

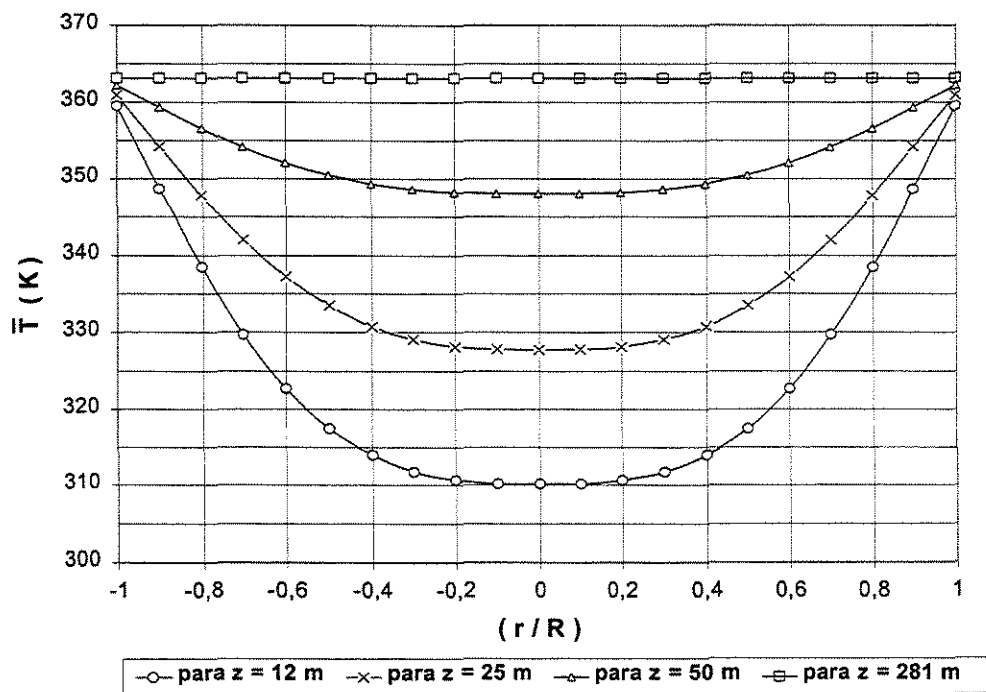


Figura 8.14 Temperatura em função do raio, para  $L = 50$  m. e  $Re = 12\,000$ .

### Tempo de residência constante ( $\theta$ fixo )

Com tempo de residência fixo em 2100 segundos e a temperatura de parede igual a 363,15 K (90 °C) a variação da temperatura média no tempo em função do raio é mostrada na Figura 8.15 para um escoamento laminar e na Figura 8.16 para escoamento turbulento. No escoamento laminar observa-se que a região central do tubo nem chega a ser aquecida, mantendo-se constante até o final do tubo. Foi somente a partir de (  $r/R = 0,4$  ) que ocorre uma leve variação na temperatura. Para o escoamento turbulento observam-se temperaturas maiores do que no caso anterior com o centro do tubo atingindo a temperatura de 352 K no final da tubulação (  $z = L$  ) e de 363 K na região próxima à parede.

Conforme esperado, os resultados acima indicam que a turbulência favorece a uma melhor transferência de calor.

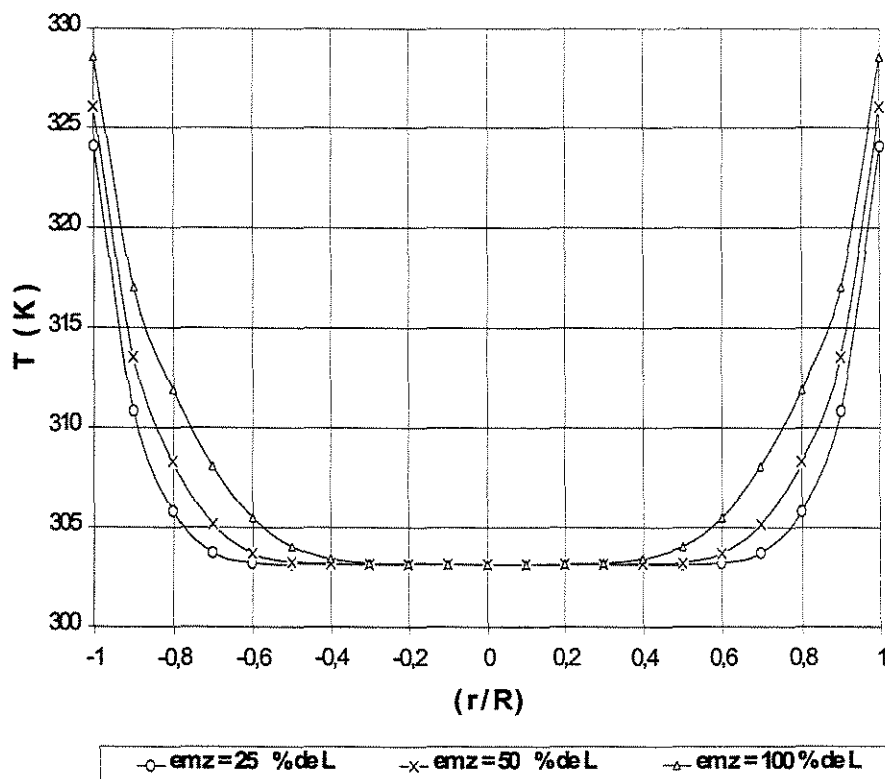


Figura 8.15 Temperatura em função do raio, para  $Re = 2\,000$ .

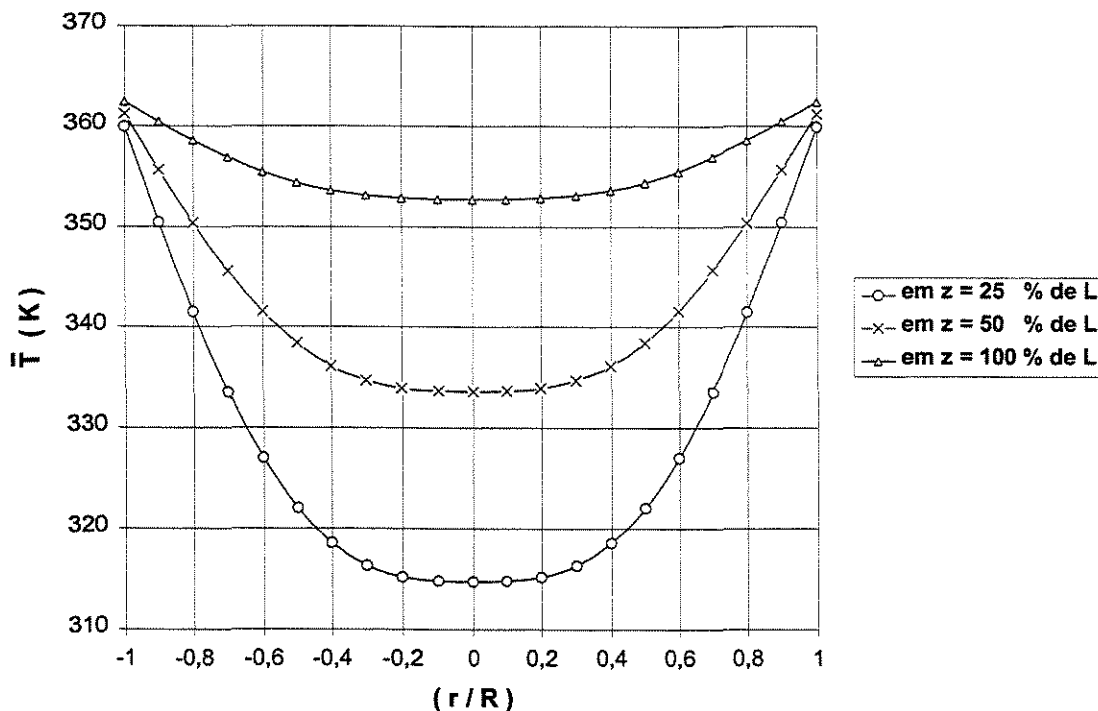


Figura 8.16 Temperatura em função do raio para  $Re = 12\,000$ .

### 8.1.5 Variação da temperatura com o comprimento

Os gráficos a seguir são para um tempo de residência de 2100 segundos e uma temperatura de parede de 363,15 K (90 °C).

As Figuras 8.17 (escoamento laminar) e 8.18 (escoamento turbulento) mostram a variação da temperatura em função do comprimento 'z'. No escoamento laminar observa-se que para  $(r/R) = 0$ , na região central do tubo, a temperatura mantém-se constante ao longo do tubo. A região próxima à parede mostra uma rápida elevação da temperatura nos dois primeiros metros, desde 303,15 K (temperatura de entrada) até 323 K, sendo que depois a temperatura vai subindo gradualmente até 328 K na saída do tubo ( $L = 10,13$  m). No escoamento turbulento, observa-se que para  $(r/R) = 0$ , na região central do tubo, a temperatura começa a se elevar a partir dos 5 metros e continua subindo gradualmente até 352,15 K na saída do tubo ( $L = 60,8$  m), enquanto que para  $(r/R) = 1$ , na região próxima à parede, a temperatura sobe rapidamente a 357 K nos cinco primeiros metros e chega a 362 K na saída do tubo ( $L = 60$  m), bem próximo à temperatura da parede ( $T_w = 363,15$  K). O comportamento observado na Figura 8.18 concorda com o comportamento da Figura 8.16, que foi calculada sob as mesmas condições, mas apresentada de forma diferente.

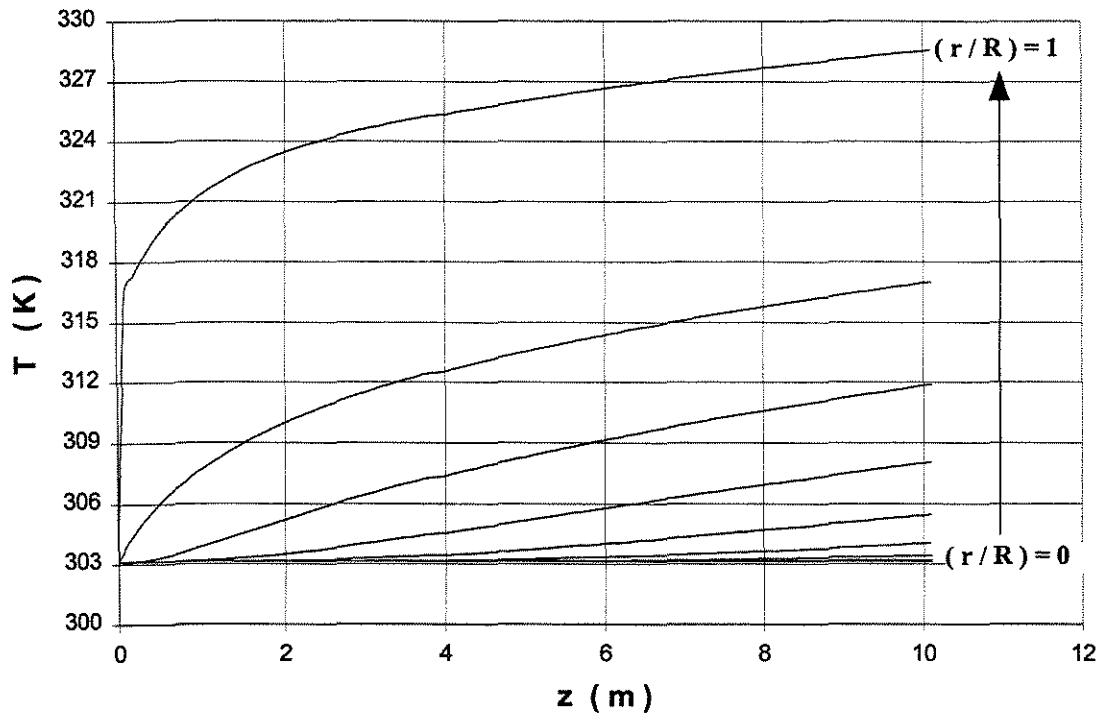


Figura 8.17 Temperatura em função do comprimento,  $Re = 2000$ .

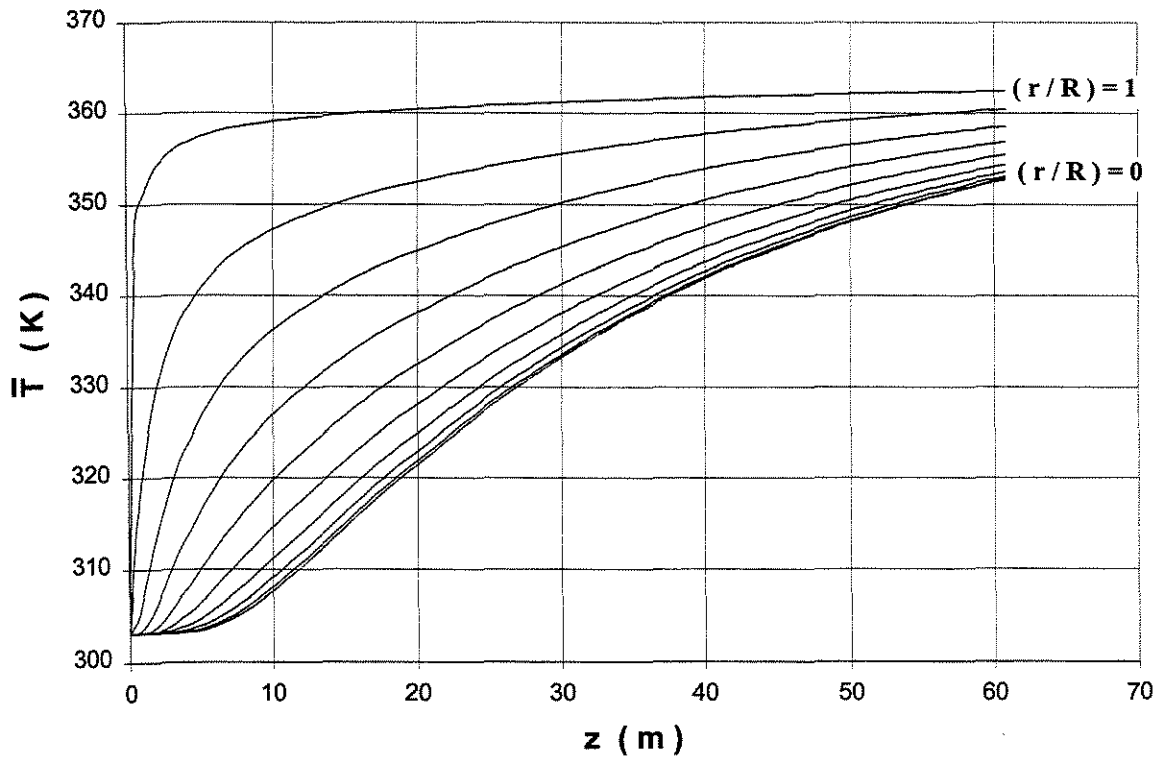


Figura 8.18 Temperatura em função do comprimento,  $Re = 12000$ .

## 8.2 ESTUDO DA VELOCIDADE

### 8.2.1 Perfis de velocidade axial

objetivo principal nesta seção é mostrar o comportamento geral do perfil da velocidade axial e como as velocidades axiais mantêm-se constantes em 'z' ao longo do tubo. Tanto para escoamentos laminares como turbulentos.

A Figura 8.19 mostra o perfil de velocidade axial em função do raio e do comprimento do tubo. Observa-se uma variação parabólica da velocidade em função do raio. A Figura 8.20, que mostra mesma variação para o regime turbulento, indica que neste regime o perfil de velocidade é mais achatado, conforme esperado.

Posteriormente serão apresentados gráficos com perfis mais detalhados da velocidade axial em função do raio, onde se poderá observar mais detalhadamente a forma das curvas tanto para o escoamento laminar, como para o turbulento.

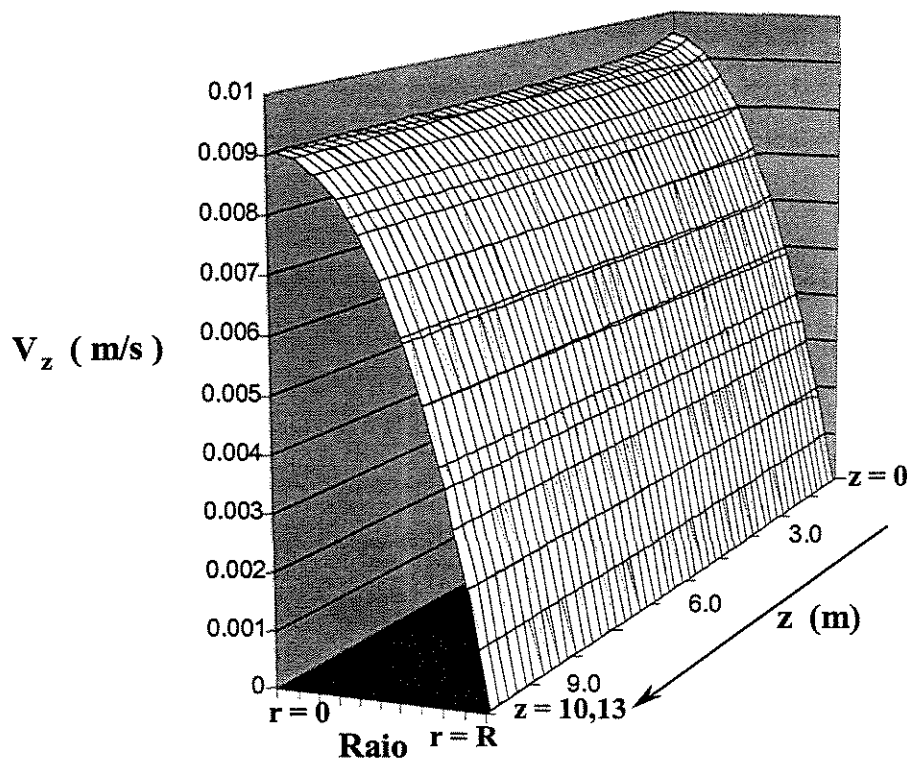


Figura 8.19 Perfil laminar de velocidade axial,  $Re = 2\,000$ .

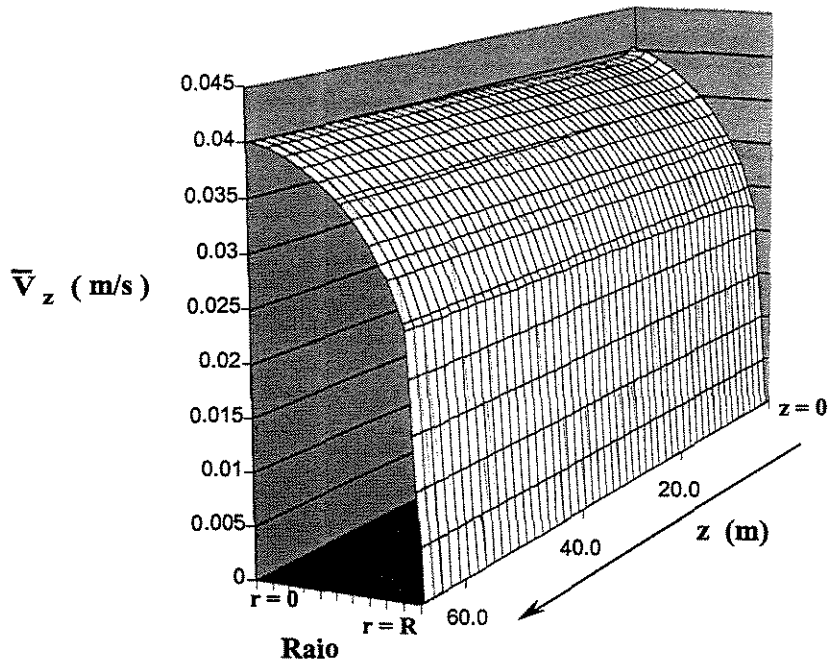


Figura 8.20 Perfil turbulento de velocidade axial,  $Re = 12\,000$ .

### 8.2.2 Variação da velocidade axial com o comprimento

As Figuras 8.21 e 8.22 mostram a variação da velocidade axial em função do comprimento ' $z$ '. Conforme as figuras anteriores mostram, a velocidade axial mantém-se praticamente constante ao longo do tubo.

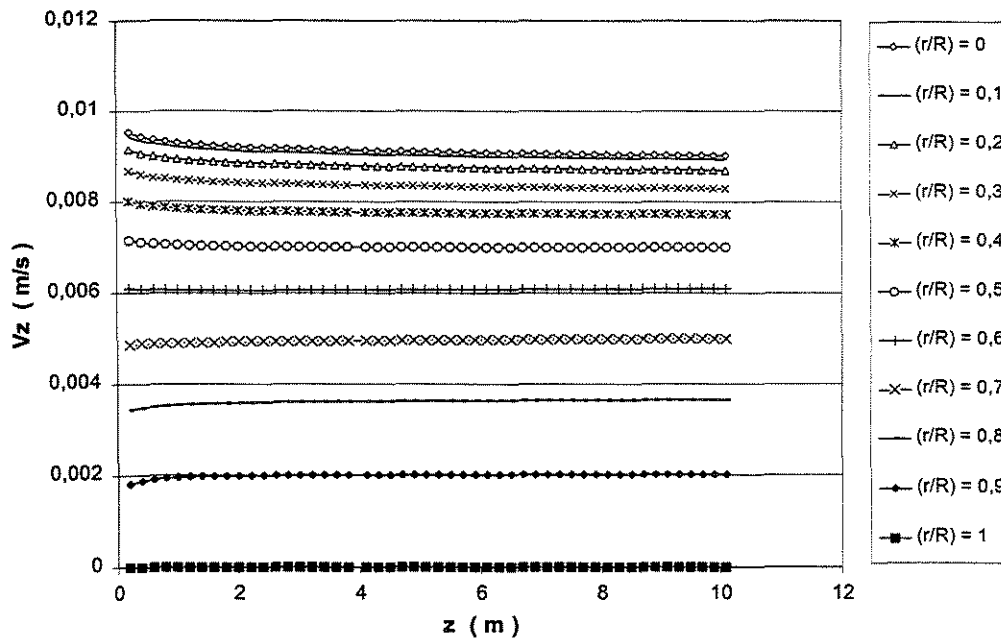


Figura 8.21 Velocidade axial em função do comprimento, para  $Re = 2\,000$ .

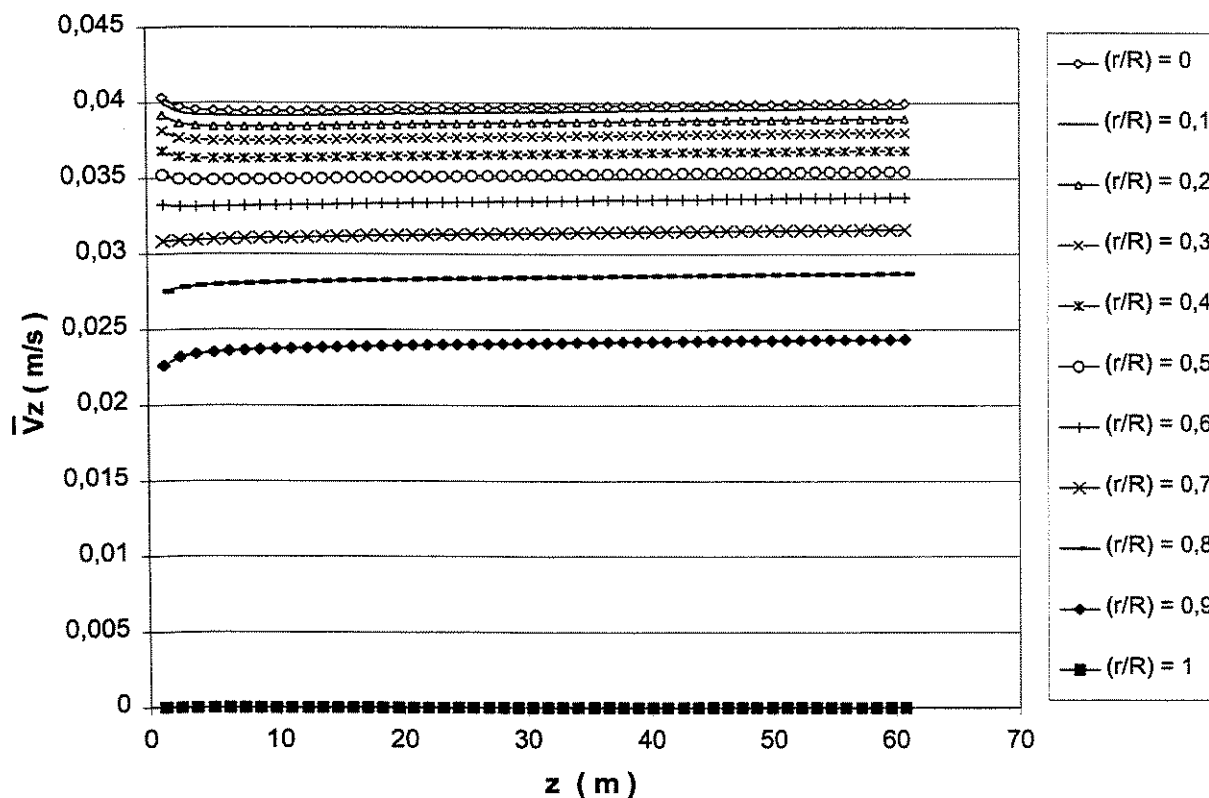


Figura 8.22 Velocidade axial em função do comprimento, para  $Re = 12\,000$ .

### 8.2.3 Variação da velocidade axial com o raio

A Figura 8.23 mostra a variação da velocidade axial em função do raio para um comprimento de tubo ( $z = 50\%$ ) e um comprimento de tubo ( $z = 100\%$ ). Somente duas curvas foram plotadas porque o perfil da velocidade mantém-se praticamente constante ao longo de ' $z$ ' e as curvas se sobrepõem. Observa-se a forma parabólica das curvas, característica do escoamento laminar. A Figura 8.24 mostra o mesmo gráfico para o escoamento turbulento em  $z = 50\%$  e na saída do tubo ( $z = 100\%$ ). Nota-se que a velocidade também mantém-se praticamente constante ao longo de ' $z$ ' e que a forma da curva não é mais parabólica e sim achatada na região central do tubo, que também é característica do escoamento turbulento.



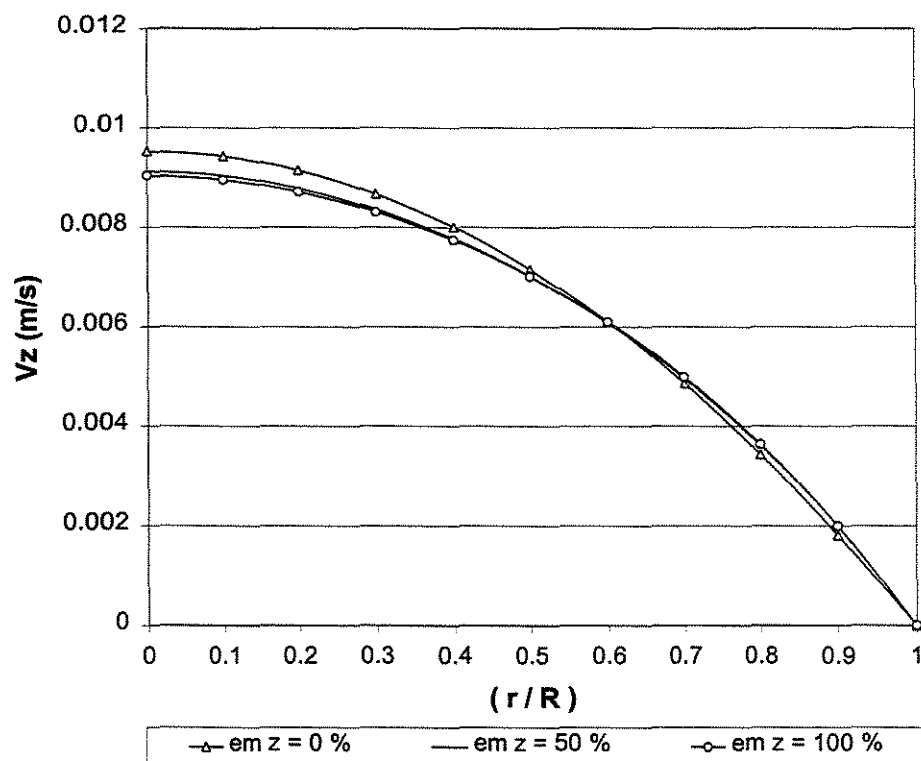


Figura 8.23 Perfil laminar da velocidade axial em função do raio, para  $Re = 2000$ .

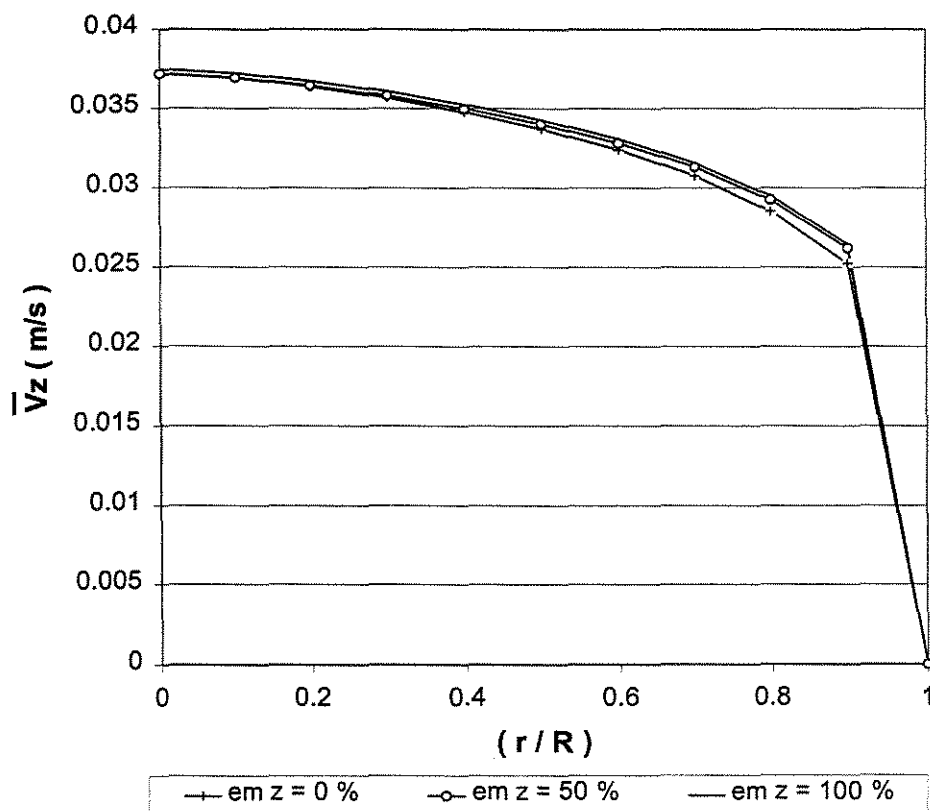


Figura 8.24 Perfil turbulento da velocidade axial em função do raio, para  $Re = 12000$ .

### 8.2.4 Comparação do perfil de velocidade axial com dados experimentais

Nesta seção são comparados os resultados obtidos a partir do presente modelo proposto, com os dados experimentais produzidos por Haber, D.F. (1966) e Laufer, J. (1954).

Muito embora as medições de Laufer tenham sido feitas com ar (fluido compressível), podem ser comparadas com os resultados do modelo desde que a razão entre a velocidade local da corrente de ar 'v' e a velocidade do som 'c' seja muito pequena ou próxima de zero.

$$M = \frac{v}{c} \cong 0 \quad (\text{ou próximo de zero}) \quad (8.2.4-1)$$

onde :

M: número de Mach

v: velocidade local da corrente

c: velocidade do som (  $c \cong 340$  m/s em condições normais de pressão e temperatura)

sendo o número de Mach 'M' próximo de zero significa que o escoamento com ar não será muito diferente do escoamento incompressível. Por tanto os resultados não serão diferentes se a densidade for considerada como não variando com a pressão. Este resultado é explicado mais detalhadamente por Sissom E.L. (1979) no capítulo 15 do livro "Fenômenos de Transporte". É importante observar que o modelo utilizado neste trabalho considera a variação de ' $\rho$ ' devido à temperatura, e não à pressão.

A Figura 8.25 comparará o perfil de velocidade em função do raio adimensional para 11 e 41 pontos radiais com os dados obtidos por Laufer para Re 50 000. A Figura 8.26 faz a mesma comparação com os dados obtidos por Laufer para Re 500 000.

Das comparações feitas nas Figuras 8.25 e 8.26 conclui-se que os resultados obtidos com 11 e 41 pontos radiais representam muito bem o perfis de velocidade e por tanto são aceitáveis.

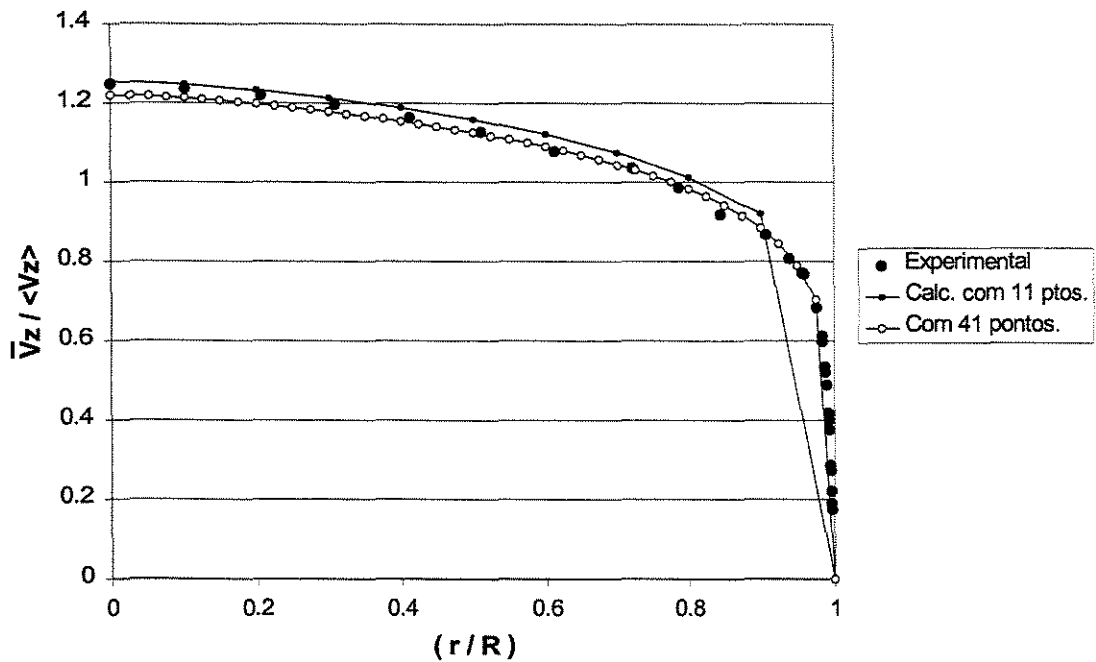


Figura 8.25 Comparação do perfil de velocidade axial, Laufer  $Re = 50\,000$ .

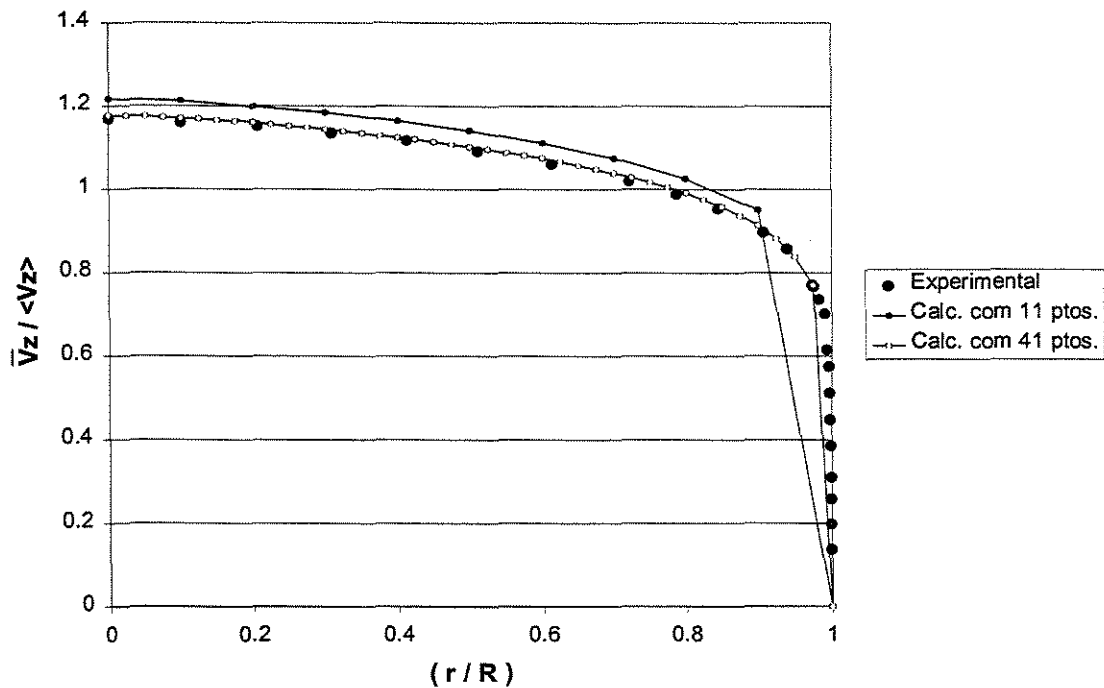


Figura 8.26 Comparação do perfil de velocidade axial, Laufer  $Re = 500\,000$ .

As Figuras 8.27 e 8.28 comparam a variação da velocidade axial em função do raio adimensional para 11 21 e 41 pontos radiais, com os dados experimentais medidos por Haber tendo como fluido a água, para números de  $Re$  de 27281 e 48997. Observa-se

novamente uma boa concordância com os resultados. O cálculo com 11 pontos radiais já é aceitável quanto com 21 e 41 pontos, mas com 41 pontos tem-se uma melhor representação na região próxima da parede.

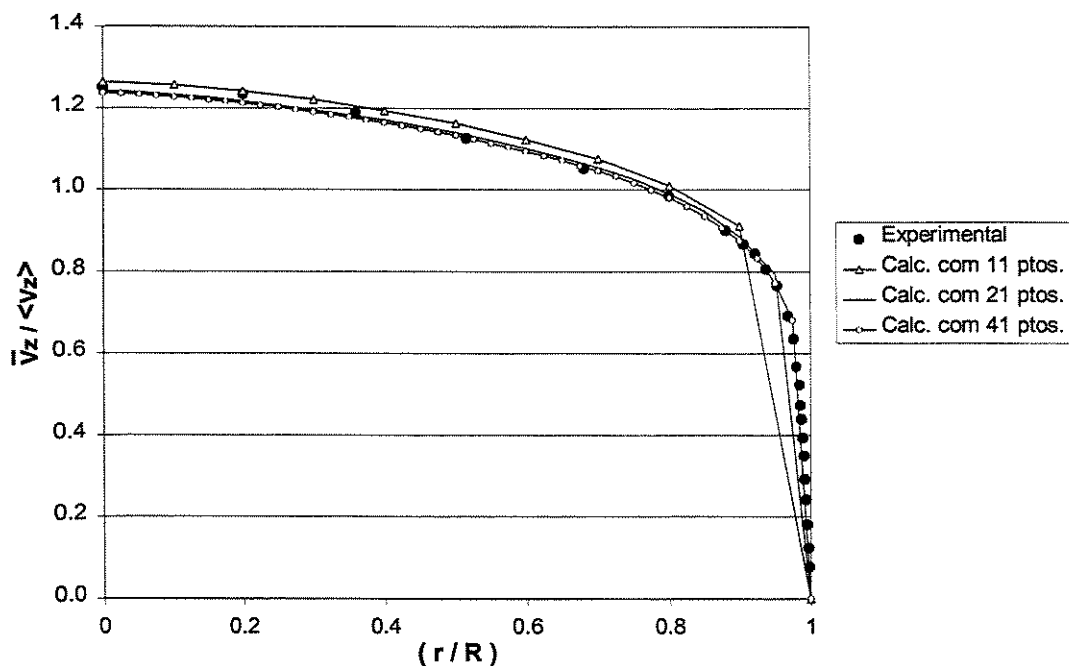


Figura 8.27 Comparação do perfil de velocidade axial, Haber J.  $Re = 27\,281$ .

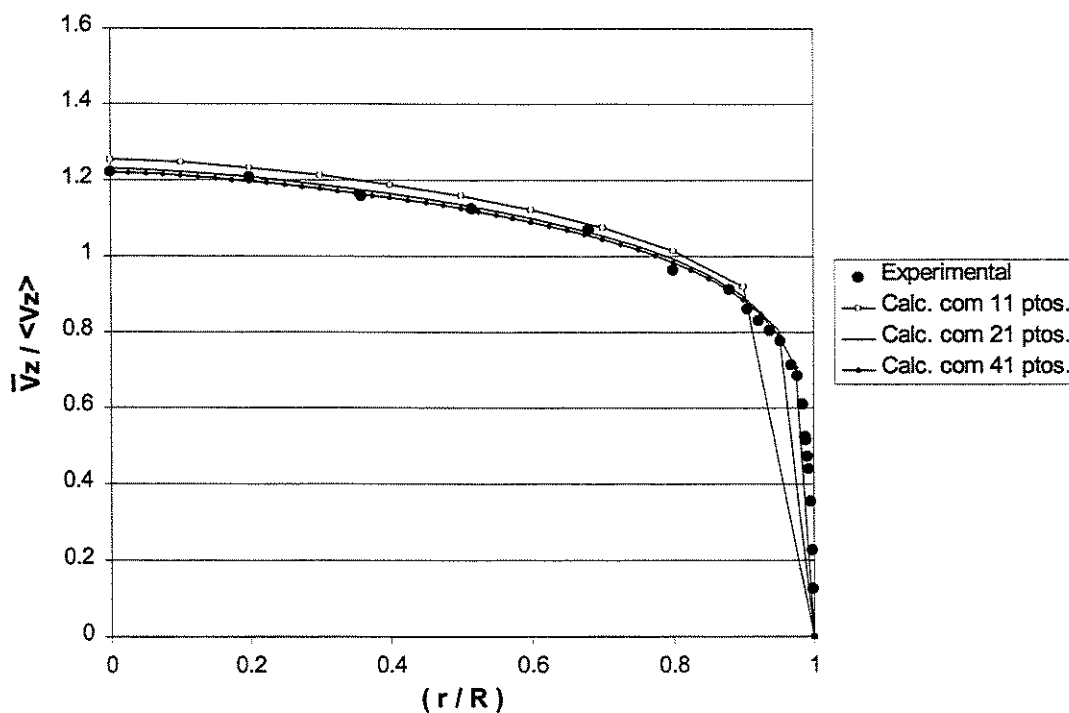


Figura 8.28 Comparação do perfil de velocidade axial, Haber J.  $Re = 48\,997$ .

### 8.2.4 Perfis de velocidade radial

Como era de se esperar, a velocidade radial é muito pequena, desprezível.

As Figuras 8.29 e 8.30 foram obtidas para um tempo de residência fixo igual a 2100 segundos, temperatura de parede 90 ° C e números de Reynolds de 2000 e 20000 respectivamente. Eles indicam a variação da velocidade radial em função do raio e do comprimento do tubo. As Figuras 8.31 e 8.32 mostram a mesma variação, só que para um comprimento fixo de 50 m de tubo.

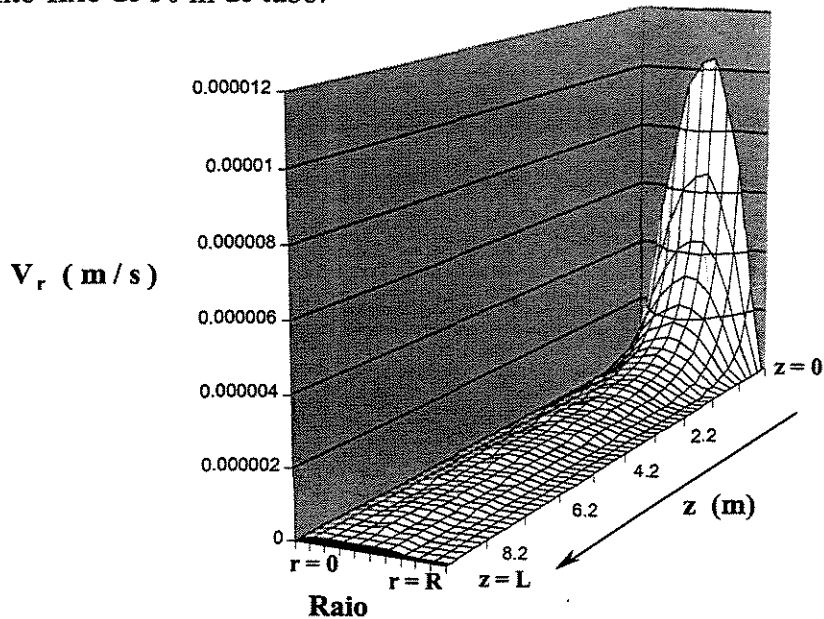


Figura 8.29 Perfil laminar de velocidade radial,  $Re = 2\,000$ .

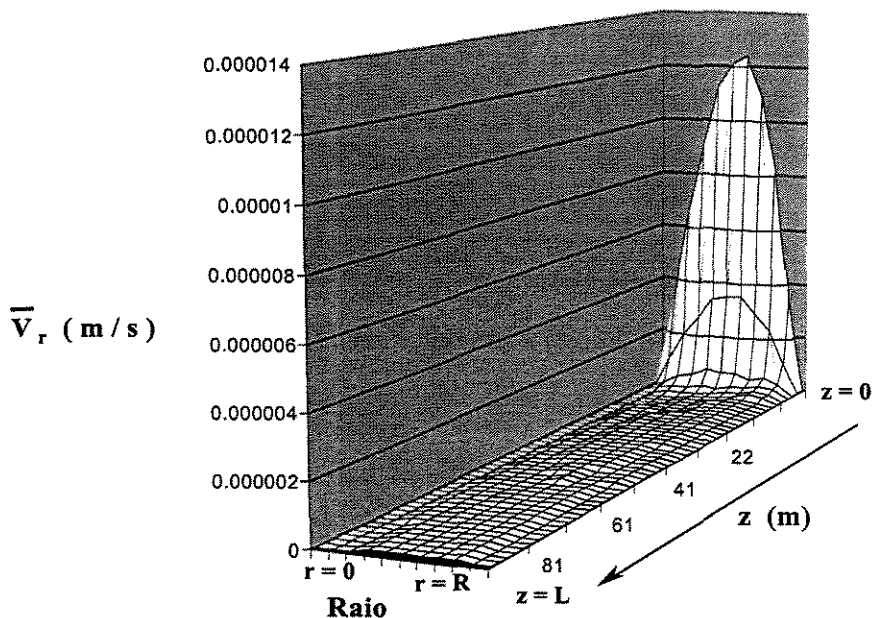


Figura 8.30 Perfil turbulento de velocidade radial,  $Re = 20\,000$ .

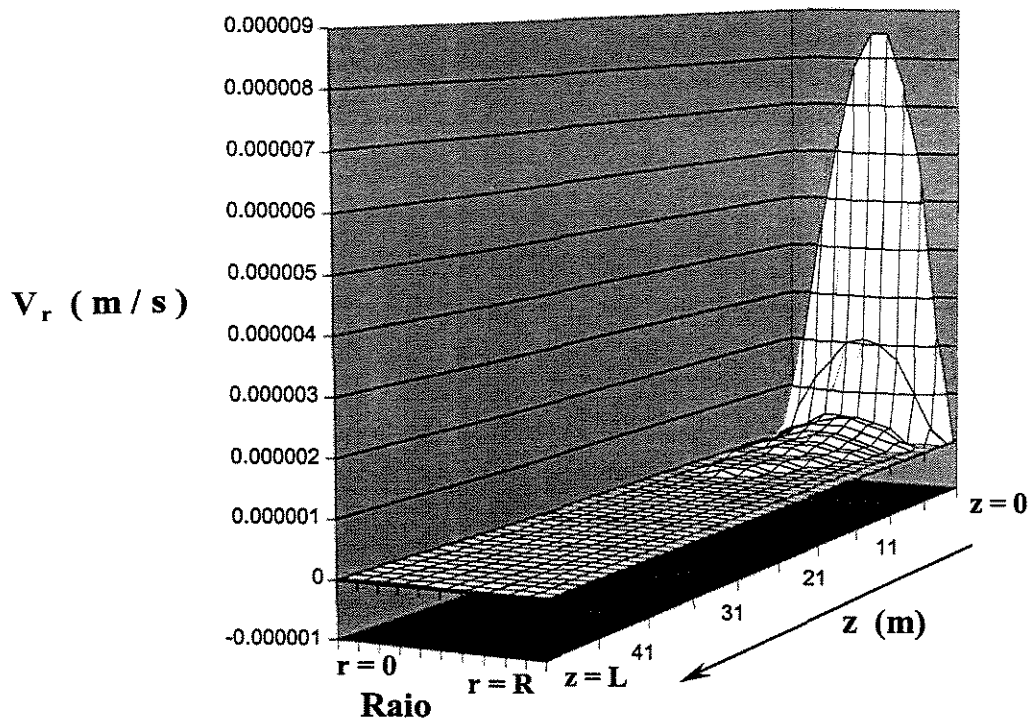


Figura 8.31 Perfil laminar de velocidade radial,  $Re = 2\,000$ .

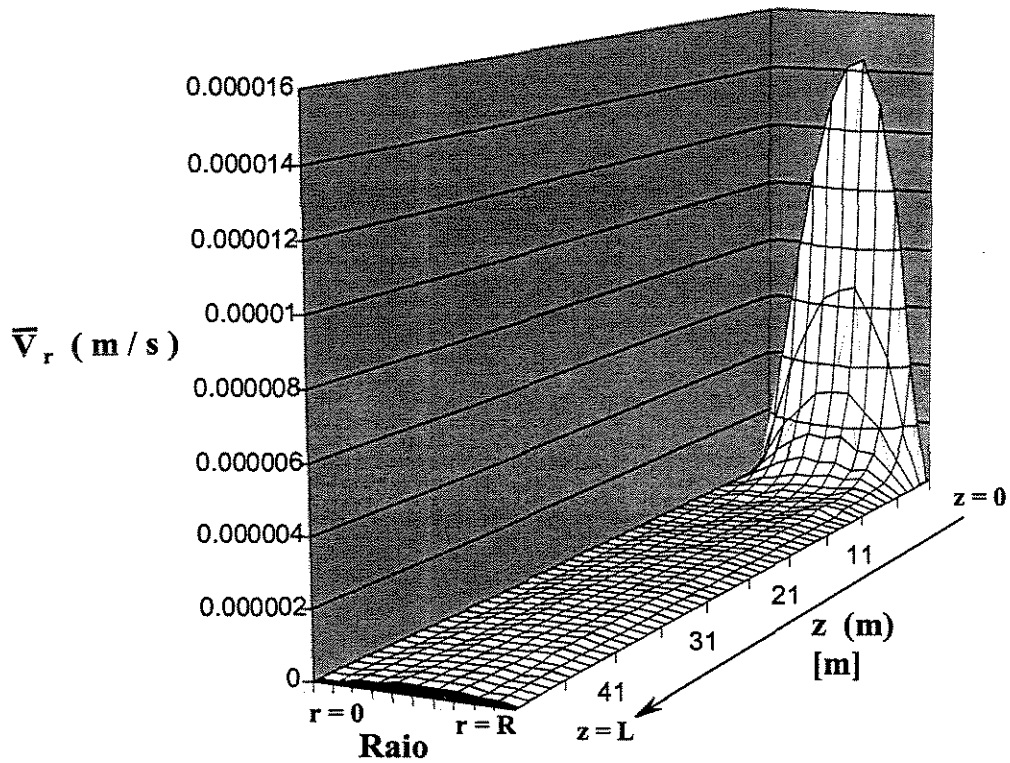


Figura 8.32 Perfil turbulento de velocidade radial,  $Re = 20\,000$ .

### 8.3 QUEDA DE PRESSÃO TOTAL

A Figura 8.33 mostra o gradiente de pressão ( $dP/dz$ ) em função do comprimento para  $Re = 2000$ , em um comprimento total de tubo igual a 30 m. Observa-se um comportamento não linear e conforme se avança em 'z' o gradiente de pressão vai diminuindo gradualmente (isto com subdivisões do mesmo comprimento no comprimento total de tubo).

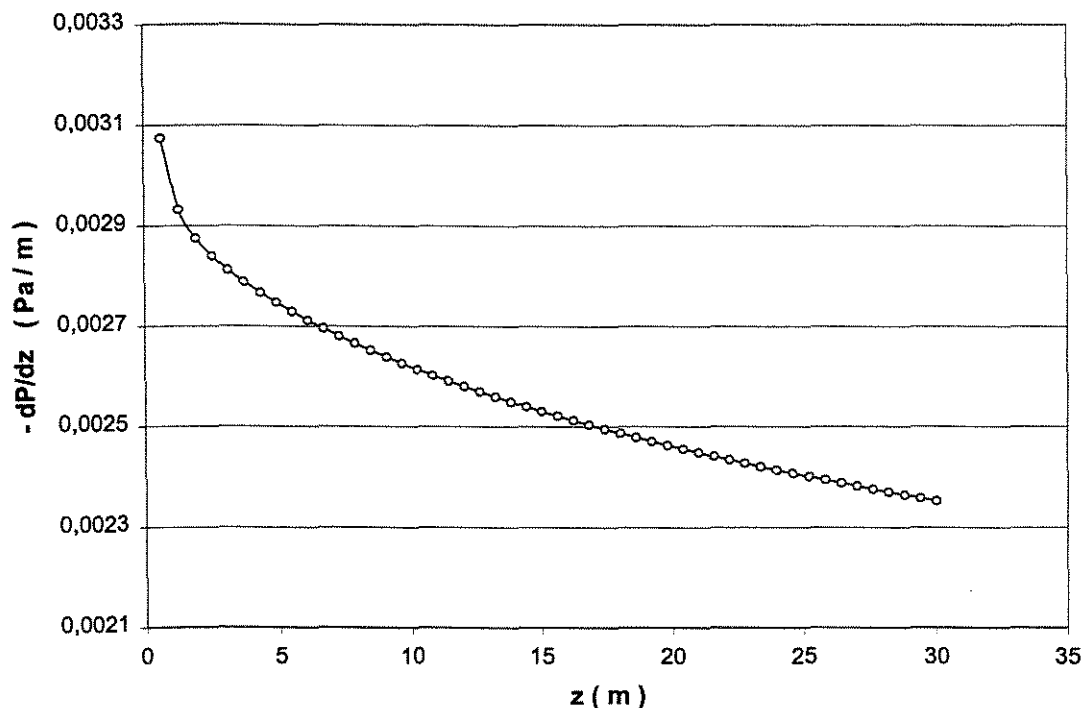


Figura 8.33 Gradiente de pressão em função do comprimento, para  $Re = 2000$  e  $L = 30$  m.

Na Figura 8.34 apresenta-se a variação da queda de pressão total em função do número de Reynolds para o escoamentos laminares não isotérmicos. Apresenta-se a queda de pressão para 10 números de Reynolds, adotando um comprimento de tubo fixo de 30 metros em todos os casos. Observa-se um comportamento aproximadamente linear e constante, com maiores quedas de pressão total para os números de Reynolds também maiores.

A temperatura de referência para o cálculo dos números de Reynolds nas Figuras 8.33 e 8.34, foi de 60 °C.

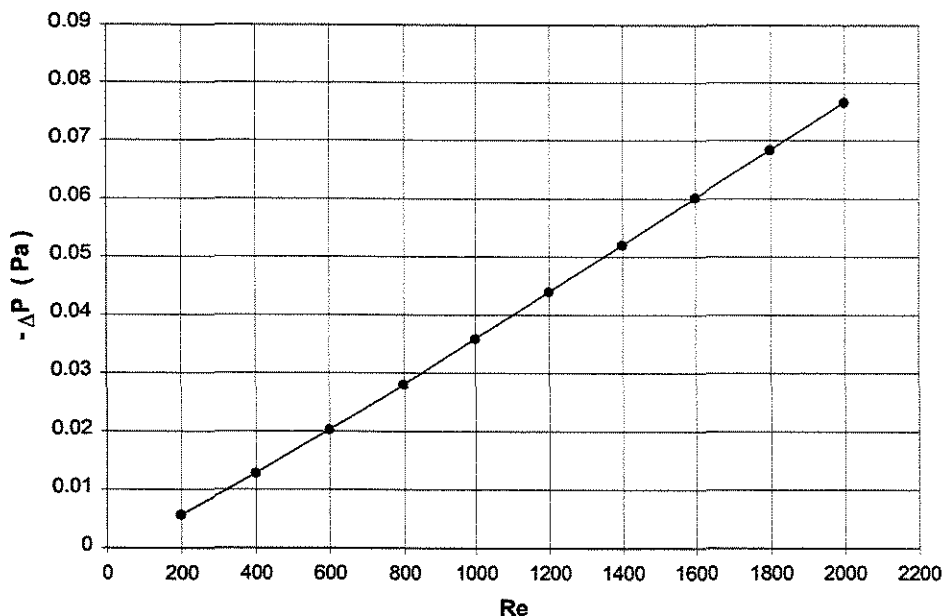


Figura 8.34 Queda de pressão total em função do Re, para esc. laminares com  $L = 30$  m.

Na Figura 8.35 mostra-se a queda de pressão total em função do número de Reynolds para escoamentos turbulentos. Apresenta-se a queda de pressão para 10 números de Reynolds, adotando um comprimento de tubo fixo de 30 metros em todos os casos. Os resultados são comparados com os valores obtidos por Friend e Metzner (1958), a partir de correlações empíricas para tubos lisos e escoamentos isotérmicos a  $20^\circ\text{C}$ .

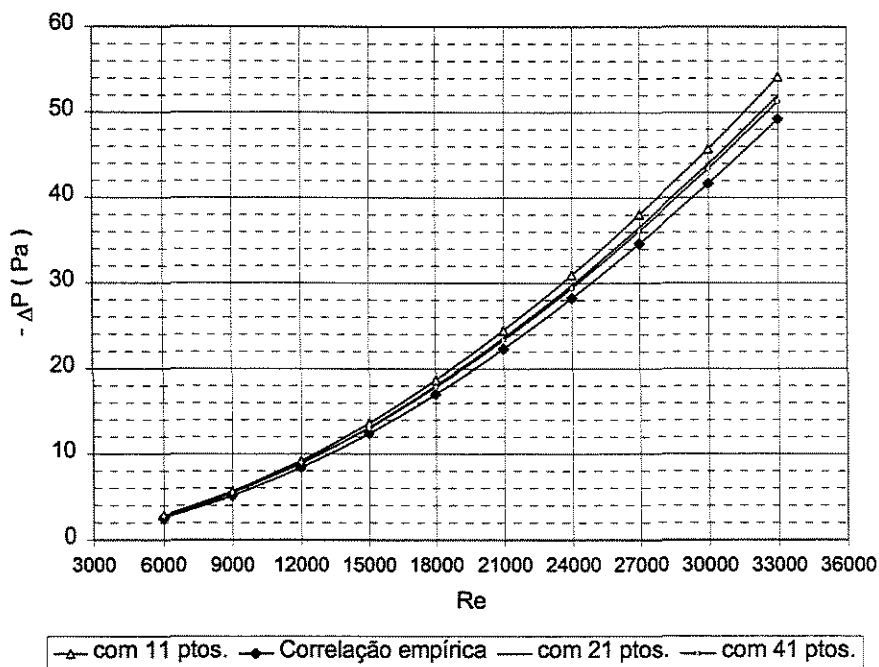


Figura 8.35 Comparação da queda de pressão em função do Re com correlações empíricas da literatura, para escoamentos turbulento e  $L = 30$  m.



# Capítulo 9

## 9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O método das diferenças finitas de 4ª ordem, utilizado na discretização radial, teve um bom desempenho oferecendo resultados confiáveis, além de ter como característica principal a simplicidade do método.

Como resultados tem-se aos perfis de temperatura, velocidade axial, velocidade radial e a queda de pressão, com as propriedades físicas variando em função da temperatura.

A solução numérica para escoamentos com números de Reynolds  $\leq 3000$  foi satisfatória. Para escoamentos com maior número de Reynolds, um maior número de pontos na discretização radial deve ser usado (por ex. 100 pontos ou mais), caso não se use a solução analítica próxima da parede.

Na solução de escoamentos turbulentos com números de Reynolds  $\geq 3000$ , usou-se o modelo de ordem zero de Prandtl para os tensores de Reynolds. Nesta parte encontrou-se certa dificuldade na resolução da região próxima à parede ( $r \cong R$ ), devido aos altos gradientes de velocidade e porque o modelo de Prandtl não funciona muito bem nesta região. Por isto calculou-se analiticamente a velocidade axial próximo à parede, como opção ao incremento de número de pontos radiais na discretização numérica. Sendo que o resto da seção, desde a região próxima à parede até o centro do tubo, continuou sendo calculado numericamente por diferenças finitas de 4ª ordem.

Os perfis de temperatura, velocidade e queda de pressão para escoamentos turbulentos, calculados da forma como foi explicado acima, foram coerentes e satisfatórios.

Para validar os resultados, compararam-se com perfis de velocidade axial para escoamentos turbulentos e isotérmicos (disponíveis na literatura), medidos experimentalmente por John Laufer (1954), para escoamento com ar e números de Reynolds de 50000 e 500000. Também foram comparados com os dados obtidos por D. F. Haber (1966), para escoamento com água e números de Reynolds de 9900; 27281 e 48997. Obtendo-se bons resultados em todos os casos.

Para validar a queda de pressão total, os resultados na faixa de  $Re = 6000$  e  $Re = 33000$  foram comparados com as correlações empíricas apresentadas por Friend and Metzner (1958), para escoamento turbulento e tubo liso. Observa-se que a medida que o número de Reynolds aumenta, também aumenta a diferença entre os resultados calculados da queda de pressão e as obtidas a partir da correlação empírica. No entanto concluindo-se como satisfatórios os resultados obtidos da queda de pressão.

Conforme o esperado, o perfil de velocidades radiais foi muito próximo de zero.

A conclusão mais importante no aquecimento de fluidos com escoamento em tubos, é que consegue-se melhores resultados de transferência de calor com escoamentos turbulentos do que com escoamentos laminares. E que a transferência de calor por convecção é o mecanismo mais importante.

Para trabalhos próximos sugere-se a comparação dos resultados usando outros modelos para a turbulência, como por exemplo o modelos de segunda ordem “ $\kappa - \epsilon$ ”.

Sugere-se também, o desenvolvimento de um software comercial para se calcular comprimentos de tubo e/ou vazões ótimas para o aquecimento ou resfriamento de fluidos.

Finalmente sugere-se como projeto mais ambicioso, o estudo do aquecimento de óleo com escoamento turbulento através de tubos, com as propriedades físicas do óleo variando em função da temperatura e incluindo a reação química da deposição ou formação do “coque”.

# Apêndice A

## PROPRIEDADES FÍSICAS DA ÁGUA EM FUNÇÃO DA TEMPERATURA

A variação das propriedades físicas da água em função da temperatura, são válidas entre 10 e 100 °C.

$$\rho = 1002,3 - 0,1321 \cdot T - 0,00308 \cdot T^2$$

$$\mu = \text{Exp} \left\{ \frac{897,9879}{T^{0,6542} + 78,1912} - \frac{17,6724}{T^{0,004707}} \right\}$$

$$k = 5,4545 \times 10^{-3} \cdot T^{0,686} + 0,5562$$

$$c_p = 4,1908 - 6,62 \times 10^{-4} \cdot T + 9,14 \times 10^{-6} \cdot T^2$$

As variáveis usadas nas equações são:

$T$  = Temperatura, ( ° C )

$\rho$  = Densidade, ( Kg / m<sup>3</sup> )

$\mu$  = Viscosidade, ( Pa . s )

$c_p$  = calor específico, ( J / g.°C ) \* 1000 = ( J / Kg. °C )

# Referências Bibliográficas

1. BAROZZI, G. S. , PAGLIARINI, G. A method to solve conjugate heat transfer problems: The case of fully developed laminar flow in a pipe. **Journal of Heat Transfer**, v.107, p.77-83, february 1985.
2. BILIR , SEFIK. Laminar flow heat transfer in pipes including two-dimensional wall and fluid axial conduction. **International journal of Heat and Mass Transfer**, v.38, n.11, p.1619-1625, august 1994.
3. BIRD, R. B. , STEWART, W. E. , LIGHTFOOT, E. N. **Transport Phenomena**. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc., 1982.
4. CARVALHO, Claudio Bezerra de. Desenvolvimento de um código de cálculo utilizando o método dos volumes finitos e o modelo de turbulência  $\kappa$ - $\epsilon$  para solução de problemas bidimensionais. São Paulo. **Faculdade de Engenharia Mecânica. Universidade estadual de Campinas**. 1993 (Mestrado)
5. CHENG, S., MEISEN, A., CHAKMAN, A. Predict amine solution properties accurately. **Hydrocarbon Processing**, v.75, n.2, p.81-84, february 1996.
6. CURTIS, F. G. , PATRICK, O. W. **Applied Numerical analysis**. California: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1994.
7. FAGHRI, M. , SPARROW, E. M. Simultaneous and fluid axial conduction in laminar-flow heat transfer. **Journal of Heat Transfer**, v.102, p.58-63, february 1980.
8. GUIRARDELLO, Reginaldo. Diagramas de fases de temperaturas e otimização de reatores catalíticos-trocadores de calor por simulação numérica. São Paulo. **Faculdade de Engenharia Química. Universidade estadual de Campinas**. 1988 (Mestrado).

9. GUIRARDELLO, R. Tópicos em modelagem e simulação de processos. (**Notas de aula IQ 397**), 1998.
10. HABER, D. F. The mean velocity distribution in fully developed turbulent water flow in a straight circular pipe. **University Microfilms Inc.** Ann Arbor, Michigan 1966.
11. HIROYUKI NAGASUE. Steady-state heat transfer with axial conduction in laminar flow in a circular tube with a specified temperature or heat flux wall. **Int. J. Heat mass transfer**, Great Britain, v.24, n.11, p.1823-1832, 1981.
12. KRITH, F. **Princípios da Transmissão de Calor**. Tradução da 3ª ed. Americana. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.
13. LAUFER, J. The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow. **National Advisory Committee of Aeronautics, Report N° 1174**. National Aeronautics and Space Administration of The United States of American. Washington, D. C. October 28, 1952.
14. MUNIZ, Luis Antônio Rezende. Métodos dos volumes finitos aplicados à problemas de escoamento bidimensional na região de entrada de dutos cilíndricos. São Paulo. **Faculdade de Engenharia Química. Universidade estadual de Campinas**. 1995 102 p (Mestrado)
15. RODI, W. **Turbulence models and their application in hydraulics**. Germany: University of Karlsruhe, 1984.
16. SANDBORN, V. A. Experimental evaluation of momentum terms in turbulent pipe flow. **National Advisory Committee of Aeronautics, Technical Note 3266**. Washington, D. C. January, 1955.
17. SCHIOZER, D. **Mecânica dos fluidos**. São Paulo: Edit. Araguaia, 1990.
18. SISSOM, L. E., PITTS, D. R. **Fenômenos de Transporte**. Tradução. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S. A., 1988.
19. SPIEGEL M.R. **Manual de fórmulas, Métodos e tabelas de Matemática**. São Paulo: Makron, McGraw-Hill Ltda. (coleção Schaum) 1992.

20. STEIN, W. A. A new equation for heat and mass transfer in pipe flow.  
**International Chemical Engineering.** v.32, n.3, p.431- 438, july 1992.
21. STREET, R. L., WATTER, G. Z., VENNARD, J. K. **Elementary fluid mechanics.**  
New York: Jhon Wiley & Sons, Inc., 1996.
22. TRAVELHO, J. , DIAS, L. A. Temperature calculation in na incompressible  
permanent laminar fluid flow through a circular pipe with axial conduction and  
viscosity. **Int. J. Heat mass transfer**, Great Britain, v.27, n.6, p.1183-1187, 1984.
23. WHITE, F. M. . **Viscous fluid flow.** New York: Mc Graw-Hill, Inc., 1991.
24. WIMPRESS, R. N. Rating Fired Heaters. **Hydrocarbon Processing and Petroleum  
Refiner**, v.42, n.10, p.115-126, 1963.
25. WUORI, P. A. Large Scale Model for Turbulent Flow in Smooth Circular Pipes.  
**Acta Polytechnica Scandinavica. Mechanical Engineering Series N° 107.**  
Helsinki, 1993.